Как «учить математикой»

Особенности организации образовательного процесса по усвоению повышенного уровня содержания математики

В. С. Даниленок,
учитель математики высшей категории

В методике преподавания математики есть три ключевых вопроса: что преподавать (содержание образования), как преподавать (современные технологии и методики обучения), зачем преподавать (цели образования). На мой взгляд, главный из них – последний. По мнению академика В. И. Арнольда, «…если раньше учили математике, то сегодня учат математикой».

Выбирая обучение в физико-математическом классе, ученики имеют достаточно высокую мотивацию к постижению этих дисциплин и хороший уровень подготовки, так как именно с физикой и математикой они связывают свое дальнейшее образование и будущую профессию. А каковы цели обучения математике ученика-гуманитария? Полагаю, наилучший ответ дал М. В. Ломоносов: «Математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит». Школьники с гуманитарным складом ума обычно имеют недостаточно высокую мотивацию для изучения математики, хотя вероятностное мышление необходимо каждому человеку, чтобы проанализировать информацию, важную лично для него.

В ходе преподавания математики в классах гуманитарного профиля мною были выделены три основные проблемы, которые объединяют большинство учеников этих классов и отличают их от сверстников из классов математического профиля:

✓ негативный психологический настрой по отношению к математике;
✓ убежденность в своей неспособности понять математику;
✓ необходимость усвоения программы за меньшее количество часов.

Система обучения в классах гуманитарного профиля должна строиться таким образом, чтобы ребятам была понятна необходимость получения математических знаний независимо от их дальнейших жизненных или профессиональных планов. Для этого целесообразно использовать творческие задания (соответствующие способностям и возможностям детей): небольшие доклады, связанные с историей возникновения тех или иных понятий алгебры и геометрии, рассказы об известных математиках, презентации по конкретным темам с использованием основных формул и понятий и т. д.

Сегодня важно сформировать умение математически исследовать явления реального мира, а значит, учащимся надо показывать не только красоту в самой математике, но и то, как эта наука практически помогает решить проблемы других дисциплин – естественнонаучных и даже гуманитарных.

В работе с профильным классом важное место занимает ***учебно-исследовательская деятельность*** школьников, имеющая своей целью построение субъективно нового знания. В процессе обучения математике на уроке и во внеклассной работе используется монопредметное исследование. Вместе с тем многие знания по математике (проценты, пропорции, статистика и теория вероятности) находят применение и в других видах исследований.

Исследовательский метод определяется как самостоятельное решение учащимися новой для них проблемы с применением таких элементов научного исследования, как наблюдение и самостоятельный анализ фактов, выдвижение гипотезы и ее проверка, формулирование выводов. Применение исследовательского метода возможно в ходе решения сложной задачи, анализа информации из учебника и других источников, разрешения поставленной учителем проблемы. Формы задания при исследовательском методе могут быть различными: поддающиеся быстрому решению, требующие целого урока, домашние задания на определенный срок.

Особое внимание для повышения качества обучения математике следует уделить ***методу проблемного обучения***, который способствует развитию познавательной активности, творческих способностей учащихся, помогает им решать сложные задания, требующие нестандартных подходов.

Наиболее приемлемыми формами учебной деятельности являются такие, где основную роль играет ***учебное общение***:

- ✓ групповая дифференцированная работа (одноуровневые и разноуровневые группы);
- ✓ парная работа (пары постоянного и сменного состава);
- ✓ индивидуальная работа с дифференцированной помощью и взаимопомощью.

Так как ученику профильного класса необходимо усваивать большой объем информации, то ее целесообразно представлять в сжатой форме в виде памяток, опорных сигналов, инструкций, алгоритмов, блок-схем, таблиц. Целесообразно предлагать для изучения за короткое время (1–2 урока) группы понятий, преобразований, определений, связанных друг с другом по форме и содержанию, т. е. осуществлять передачу информации блоками. Такой опыт обучения приносит 20% чистой экономии времени против общепринятых учебных норм. Поэтому в классах, где математика является профильным предметом, предлагаю изучать теоретический материал крупными блоками и осуществлять это в форме ***уроков-лекций***. Урок-лекция состоит из трех этапов:

1. Организационный этап (обсуждение плана лекции).
2. Чтение лекции (2/3 урока).
3. Ответы на вопросы; обобщение, выводы; постановка домашнего задания.

Лекция должна представлять собой диалог: содержание материала подается через серию вопросов, на которые ученик отвечает непосредственно в ходе восприятия материала.

Значительный эффект для активизации мыслительной деятельности учащихся дает прием, который ставит их перед необходимостью делать сравнения, сопоставлять новые факты, ведь, как писал Гельвеций, «всякое сравнение предметов между собой предполагает внимание, всякое внимание –

усилие, а всякое усилие – побуждение, заставляющее сделать это». Поэтому на уроках важно рассматривать все понятия в сравнении.

Необходимо побуждать учащихся вести ***конспект лекции***, а составление опорного конспекта по теме может быть задано на дом (с проверкой на следующем уроке).

Кроме лекций, эффективной формой организации урока в профильном классе является ***семинар-практикум***, характеризующийся сочетанием работы части класса в кратковременных группах с задачами разных уровней и фронтальной работы учителя с остальной частью класса. Во время групповой работы на уроке учитель по очереди присоединяется к каждой группе в качестве консультанта.

Предлагаю вашему вниманию план-конспект урока-практикума в 10 классе, где математика изучается на повышенном уровне.

Тема. Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Цель: формирование умений и навыков практического применения свойств обратных тригонометрических функций.

Задачи:

- ✓ создать условия для развития логического и аналитического мышления, умения применять знания, развития вычислительных навыков;
- ✓ содействовать воспитанию волевых качеств (трудолюбия, усидчивости, внимания), формированию правильной самооценки.
- ✓ расширить и углубить представления учащихся о приемах и методах преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции;
- ✓ помочь овладеть рядом технических и интеллектуальных умений на уровне свободного их использования;
- ✓ развить интерес и положительную мотивацию изучения математики.

Тип урока: комплексное применение ранее полученных знаний.

Методы и формы обучения: фронтальный, индивидуальный, групповой, наглядно-практический; групповая и индивидуальная работа.

Ход урока

I. Организационный этап

II. Актуализация опорных знаний

1. Устная работа в группах.

Определить по графику вид обратной тригонометрической функции, дать формулировку и указать ее свойства.

(Каждой из 4 групп в произвольном порядке достается один из графиков обратных тригонометрических функций. Примерное время на подготовку ответов групп – 3 минуты, после чего заслушиваются ответы представителей каждой группы.)

Предполагаемые ответы групп

Номер	Предполагаемый ответ

группы	
1	Функция $y = arcsin\,x$ определена и монотонно возрастает на отрезке [- 1; 1]; $arcsin(-x) = -arcsin\,x\ (x \in [-1;1])$; $E(arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
2	Функция $y = arccos\,x$ определена и монотонно убывает на отрезке [- 1; 1]; $arccos(-x) = \pi - arccosx\ (x\epsilon[-1;1])$; $E(arccos) = [0;\pi]$.
3	Функция $y = arctg\,x$ определена и монотонно возрастает на $\boldsymbol{R}$; $arctg(-x) = -arctg\ x\ (x \in \boldsymbol{R})$; $E(arctg) = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.
4	Функция $y = arcctg\,x$ определена и монотонно убывает на $\boldsymbol{R}$; $arcctg(-x) = \pi - arcctgx\ (x\epsilon\boldsymbol{R})$; $E(arcctg) = (0;\pi)$.

2. Индивидуальное задание (выполняется у доски).

Найти область определения и область значения функции y = 2arctg $\sqrt{x}$.

3. Фронтальное задание (выполняется в парах с последующей проверкой).

Найти значения обратных тригонометрических функций для некоторых чисел: вариант 1 – нечетные, вариант 2 – четные задания (Приложение 1).

III. Устные упражнения

Найти значение выражений: a) sin(arcsin $\frac{12}{13}$); b) tg(arctg 4);

c) cos(arcos $\frac{1}{4}$); d) ctg(arcctg 5); e) cos(arcsin(- $\frac{1}{2}$)); f) sin(arccos $\frac{3}{5}$).

В ходе решения данных заданий учащиеся отвечают на вопросы учителя:

- ✓ Какие свойства обратных тригонометрических функций использовали для вычислений заданий a, b, c, d? (Примерные ответы учащихся: sin(arcsin x) = x, cos(arcos x) = x, если x ∈ [-1; 1]; tg(arctg x) = x, ctg (arcctg x) = x, если x ∈ R.)
- ✓ Как вычислить значение выражения e? (Найти arcsin(- $\frac{1}{2}$) = - $\frac{\pi}{6}$ и cos(- $\frac{\pi}{6}$) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.)
- ✓ Можно ли в примере f поступить аналогичным образом? (Нет, т. к. мы не знаем значения arccos $\frac{3}{5}$.)

Выполнение последнего задания может вызвать затруднения. Однако создание проблемной ситуации на этом этапе позволит логически перейти к определению темы и цели урока.

IV. Совместное определение темы, цели и задач урока

Учитель. Какие знания помогут в решении этого примера (f)? Что поможет найти путь решения?

Примерный ответ учащихся. Попробуем воспользоваться определением арккосинуса числа arccos $\frac{3}{5}$ = β и cos β = $\frac{3}{5}$, где β ∈ [0; π].

Значит, зная cos β, надо найти sin β, а для этого воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, из которого sin β = $\mp\sqrt{1-\cos^2\beta}$.

Так как β – угол I четверти, то sin β = $\frac{4}{5}$. Таким образом, sin(arccos $\frac{3}{5}$) = $\frac{4}{5}$.

Учитель. Верно. Вы показали, как полученные знания помогают найти правильные подходы в решении более сложных заданий. Каковы же цели и задачи урока? *(Учиться находить значения подобных выражений, преобразовывать выражения, содержащие аркфункции, узнать, где эти знания можно применить.)*

V. Практическое применение знаний

(Каждой паре учащихся предоставлен раздаточный материал с заданиями. Учащиеся по желанию могут работать в паре или индивидуально. Решения некоторых примеров можно вынести на доску с последующей проверкой.)

1. Найти значения выражений:

а) cos(arcsin $\frac{2}{3}$);

б) sin(arcctg (- $\sqrt{8}$)).

2. Решить уравнения:

а) cos(arccos (x + 2)) = x + 2;

б) sin(arcsin (x – 1)) = x^2 - 4x + 5;

в) 12arctg² $\frac{x}{2}$ = $\pi(3\pi + 5$arctg $\frac{x}{2}$);

г) 3arctg x + 5arcctg x = 2π

(При решении уравнений желательно провести обсуждение применяемых методов.)

VI. Определение уровня и качества знаний

(Учащиеся самостоятельно решают уравнения по выбору, желающие работают у доски. Решения проверяются (Приложение 2). Учащиеся предлагают пути решения, обосновывают их, доказывают преимущества выбранного метода, основываясь на определении и свойствах аркфункций. Учитель на этом этапе урока выступает в роли консультанта. Более успешным ученикам предлагается на выбор выполнить задания из карточки «Реши самостоятельно» (Приложение 3). Желающие по окончании урока сдают работы на проверку учителю.)

VII. Подведение итогов. Рефлексия

- ✓ Закончите предложение «Урок заставил задуматься о…».
- ✓ Кому сегодня на уроке вы хотели бы сделать комплимент?

VIII. Домашнее задание

Выполнить задания с карточки «Реши самостоятельно» (можно на выбор) или составить карточки-задания по решению уравнений с аркфункциями.

Приложение 1

Вычислить:	Вычислить:	Проверь себя	Проверь себя
1) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\arccos (-\frac{1}{2})$ 5) arccos 1 7) arccos 0 9) arctg (-1) 11) arctg $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 13) arcctg $(-\frac{\sqrt{3}}{3})$ 15) arcctg 0 17) cos (arccos $\frac{1}{2}$) 19) tg (arctg 8)	2) $\arcsin (-\frac{\sqrt{3}}{2})$ 4) arcsin (-1) 6) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ 8) $\arccos (-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 10) arctg $(-\sqrt{3})$ 12) arcctg (-1) 14) arcctg $\sqrt{3}$ 16) sin (arcsin $\frac{\sqrt{5}}{3}$) 18) ctg (arcctg π) 20) sin (arcsin 0,328)	1) $\frac{\pi}{4}$ 3) $\frac{2\pi}{3}$ 5) 0 7) $\frac{\pi}{2}$ 9) $-\frac{\pi}{4}$ 11) $\frac{\pi}{6}$ 13) $\frac{2\pi}{3}$ 15) $\frac{\pi}{2}$ 17) $\frac{1}{4}$ 19) 8	2) $-\frac{\pi}{3}$ 4) $-\frac{\pi}{2}$ 6) $\frac{\pi}{6}$ 8) $\frac{3\pi}{4}$ 10) $-\frac{\pi}{3}$ 12) $\frac{3\pi}{4}$ 14) $\frac{\pi}{6}$ 16) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 18) π 20) 0,328

Приложение 2

Решения уравнений

а) cos(arccos (x + 2)) = x + 2

$-1 \leq x + 2 \leq 1$

$-3 \leq x \leq -1$

Ответ: [- 3; - 1]

б) sin(arcsin (x – 1)) = x² - 4x + 5

$\begin{cases} x - 1 = x^2 - 4x + 5, \\ -1 \leq x - 1 \leq 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 0, \\ 0 \leq x \leq 2; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2; x = 3, \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

x = 2

Ответ: 2

в) $12\text{arctg}^2 \frac{x}{2} = \pi(3\pi + 5\text{arctg} \frac{x}{2});$

Введем замену: arctg $\frac{x}{2}$ = t; $t \in (-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2})$

$12t^2 = \pi (3\pi + 5t)$; $12t^2 - 5\pi t - 3\pi^2 = 0$;

$D = 169\pi^2$; $t = \frac{3\pi}{4} \notin (-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2})$; $t = -\frac{\pi}{3}$

arctg $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3}$; $\frac{x}{2}$ = tg $(-\frac{\pi}{3})$

$\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$; $x = -2\sqrt{3}$

Ответ: $-2\sqrt{3}$

г) 3arctg x + 5arcctg x = 2π

Пусть arctg x = t, тогда arcctg x = $\frac{\pi}{2} - t$

Уравнение примет вид:

$3t + 5 (\frac{\pi}{2} - t) = 2\pi$

$t = \frac{\pi}{4}$

arctg x = $\frac{\pi}{4}$; x = 1

Ответ: 1

Приложение 3

Карточка «Реши самостоятельно»

1. Найти область определения и множество значений функции y = $\sqrt{-\arcsin x}$.

2. Вычислить: tg (arccos $\frac{3}{4}$).

3. Решить уравнение arcsin (x^2 - 4) = arcsin (2x + 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Запрудский, Н. И.** Мультипрофильная школа: предпочтительная модель дифференциации / Н. И. Запрудский // Кіраванне ў адукацыі. – 2002. – № 2. – С. 108–112.

2. **Орлова, Л. В.** Психолого-педагогические аспекты мультипрофильного обучения / Л. В. Орлова // Кіраванне ў адукацыі. – 2003. – № 3. – С. 87–94.

3. **Семушкин, А. Д.** Активизация мыслительной деятельности учащихся при изучении математике / А. Д. Семушкин. – М.: Просвещение, 1998.