# Методы решения задач с использованием свойств площадей

**С. И. Якуш**, учитель математики высшей категории

СШ № 8 г. Слонима

Искусство решать геометрические задачи чем-то напоминает трюки иллюзиониста: иногда, даже зная решение задачи, трудно понять, как можно было до него додуматься. Почти каждая, сколько-нибудь трудная геометрическая задача требует индивидуального подхода. А хотелось бы иметь общий метод решения, который к тому же позволял бы «прикинуть» решение до конца, не проводя подробных выкладок.

К сожалению, такого эффективного метода нет. Но существуют приёмы, применимые ко многим задачам. Один из них мы и рассмотрим. Предлагаем один из алгоритмов решения многих геометрических задач – ***свойства площадей***, т. е. решение задач с использованием свойств площадей.

### *Основные свойства площадей*

1. Если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной основанию, то площадь при этом не изменится.

2. Если два треугольника имеют одинаковые высоты, то отношение их площадей равно отношению длин оснований (сторон, на которые опущены эти высоты).

3. Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведение сторон, заключающих этот угол.

4. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

5. Средние линии треугольника площади $S$ отсекают от него треугольники площади, которых равны одной четвёртой части площади треугольника $ABC$.

6. Медианы треугольника делят его на 2, 3, 6 равновеликих частей.

*При решении задач методом площадей следует помнить, что*

1)Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.

2) Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника. Произведения площадей треугольников, прилегающих к противоположным сторонам, равны.

***Два направления при работе с использованием свойств площадей.***

***Метод сравнения площадей.***

В этом случае одну и ту же площадь считают несколькими способами, используя известные, введенные и искомые величины. В силу того что площадь одна, полученные выражения для неё приравнивают, что дает одно или несколько уравнений для нахождения неизвестных величин или их комбинаций. Здесь площадь выступает как ткань, связующая различные выражения, причем в условии про нее может и вовсе не говориться. Широкие возможности этому направлению обеспечиваются наличием большого числа формул для вычисления площади, а также наличием возможности применять их для разных ракурсов одной и той же фигуры.

***Метод отношения площадей***

В этом случае задачи решают, используя отношения площадей или отношения отрезков. Здесь есть как бы несколько поднаправлений:

**1** Площади треугольников, имеющих равные или общие основания, относятся как высоты, проведенные к этим основаниям.

**2** Площади треугольников, имеющих равные или общую высоту, относятся как основания, к которым эти высоты проведены.

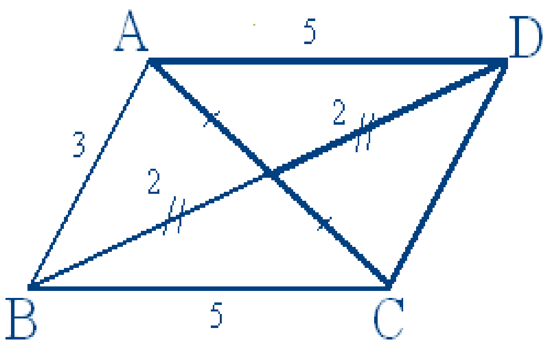
**3** Площади треугольников, имеющих равные или общий или смежные углы, относятся как произведение отношений сторон, прилежащих к этим углам.

При поиске отношений площадей фигур более сложных, чем треугольник, эти фигуры разбиваются на треугольники.

Проанализировав 328 задач предлагаем для рассмотрения наиболее типичные и значимые задачи из экзаменационного сборника,из сборников ЦТ, сборников олимпиадных задач.

***Примеры задач, решаемых способом сравнения площадей:***

***№1 Найдите площадь треугольника со сторонами 3 и 5 и медианой длиной 2, проведённой к третьей стороне.***

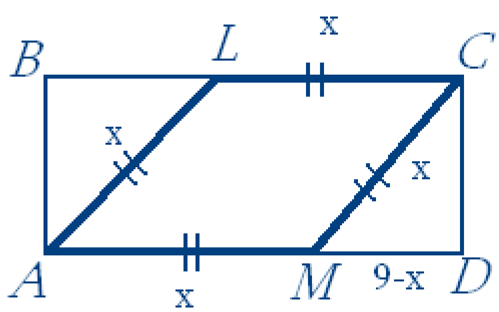



Решение. Достроим треугольник ABC до параллелограмма и введем обозначения.

$S_{ABC}= \frac{1}{2}S_{ABCD}= S_{ABD}$. Числа 3, 4 и 5 образуют Пифагорову тройку, значит $\angle ABD=90^\circ$. $S= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$. Ответ:6.

***№5 ( В10 тестирование 2015г.) В прямоугольнике ABCD выбраны точки L на стороне ВС и М на стороне AD так, что ALCM – ромб. Найти площадь этого ромба, если АВ=3, ВС=9.***

Решение.




$S_{ABCD} = 3 \cdot 9 = 27$.

Пусть AL = LC = CM = AM = x , MD = 9-x

$\Delta CMD$ по т. Пифагора

$(9-x)^2 = x^2 - 9$ ;

$81 – 18x + x^2 – x^2 + 9 = 0$;

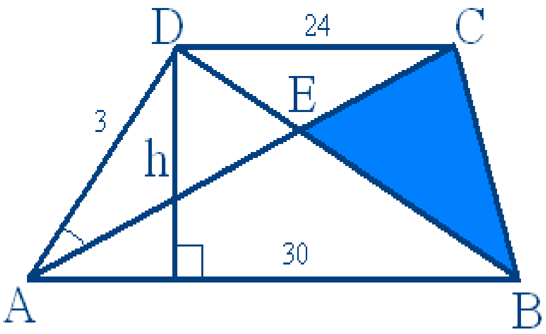
$18x = 90$;

$x = 5$ ; $MD = 9 – 5 = 4$.

$S = 5 \cdot 3 = 15$. Ответ : 15.

***Примеры задач, решаемых с помощью отношения площадей:***

***№2 В трапеции ABCD отрезки AB и CD- основания. Диагонали пересекаются в точке E. Найдите $S_{BCE}$, если AB=30, CD= 24, AD= 3, угол DAB равен $\frac{\pi}{3}$.*** Решение.




$h = 3\sin\frac{\pi}{3}$, $S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$

$\Delta DCE \sim \Delta BAE$, значит

$\frac{DE}{BE} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$

Методом площадей находим отношение

$\frac{S_{BCE}}{S_{BCD}} = \frac{BE}{BД} = \frac{5}{9}$.

Значит, $S_{BCE} = \frac{5}{9} \cdot 18\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ .

Ответ: $10\sqrt{3}$.

***На стыке с алгеброй***

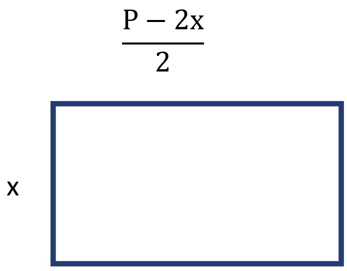
***№1 Из всех прямоугольников с данным периметром найдите тс которого площадь наиболы***

Решение.

Обозначим одну из сторон через x. Тогда вторая $\frac{P}{2} - x$. Рассмотрим функцию:

$S(x) = x * \left(\frac{P}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{P}{2}x$, где

$0 < x < \frac{P}{2}$, с правой стороны квадратный трёхчлен.




Графиком является парабола ветви которой направлены вниз, значит

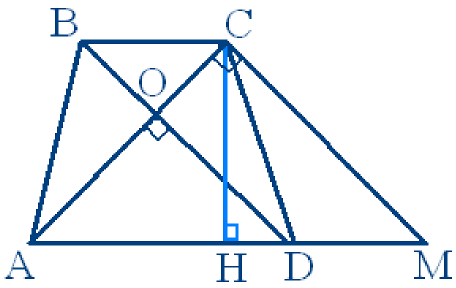
$S(x) \leq S(x_в)$, где $X_в = \frac{-P/2}{-2} = \frac{P}{4}$. Но тогда все стороны равны, значит, это квадрат.

Ответ: квадрат.

***Задачи олимпиадного характера, решаемые с помощью свойств площадей:***

***№1 Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, одна из них равна 13, а высота трапеции равна 5. Найти значение выражения 24·S, где S – площадь трапеции.***

Решение.




Д.П. проводим CM параллельно BD.

CH – высота. DM = BC (DBCM – параллелограмм).

$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot CH$ ;BC = DM.

$\angle AOD = 90^\circ$ ,значит $\angle ACM = 90^\circ$.

В $\Delta CHM$ :$HM^2 = 13^2 - 5^2$ HM = 12.

В $\Delta$ ACM $CH^2 = AH \cdot HM$; $5^2 = AH \cdot 12$. $AH = \frac{25}{12}$

$AM = 12 + \frac{25}{12} = \frac{169}{12}$ . В$\Delta$ACM $S_{ACM} = \frac{1}{2} AM \cdot CH$;

$S_{ACM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{169}{12} \cdot 5 = \frac{845}{24}$; $24 \cdot S = 24 \cdot \frac{845}{24} = 845$.

Ответ: 845.

Задачи на использование свойств площадей, как правило, не имеют универсального способа решения. Задачи такого вида часто встречаются на вступительных экзаменах и на централизованном тестировании. Представленный нами материал также способствует развитию умения исследовать чертёж, делать дополнительные построения, видеть возникшие взаимосвязи между геометрическими величинами, производить расчёты.

## Литература


1. **Азаров, А. И.** Методы решения планиметрических задач. 8-11 классы / А. И. Азаров, В. В. Казаков, Ю. А. Чурбанов. Минск, 2005.– 335 с.
2. **Амелькин, В. В.** Геометрия на плоскости: теория, задачи, решения/В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич, В. Л. Тимохович. Минск, 2003. – 592 с.

3. **Мамонтова, Г. Г.** Математика. Подготовка к тестированию/ Г. Г. Мамонтова. Минск, 2005.–685с.
4. **Орехова, А. И.** Планиметрия. Свойства площадей в задачах./ А. И. Орехова. Мозырь ООО ИД «Белый ветер», 2009. – 67 с.
5. **Сборник заданий для выпускного экзамена** по учебному предмету «Математика» за период обучения и воспитания на II ступени общего среднего образования; под общ.ред. В.В. Беняш-Кривца. – Минск: Аверсэв, 2014. – 318с.
6. **Централизованное тестирование.** Математика: полный сборник тестов. – Минск: Аверсэв, 2015. – 209с.
7. **Централизованное тестирование**. Математика: сборник тестов. - Минск: Аверсэв, 2015.-34с.
8. **Шарыгин, И. Ф.** Математика. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы / И. Ф.Шарыгин. Москва, 1999.-304с.
9. **Шлыков, В. В.** Задачи по планиметрии 7-9.Учебное пособие для 7-9 классов общеобразовательной школы / В. В. Шлыков.Минск,2003.-287с.