ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИЁМА
«ПОВТОРЕНИЕ ПО ВЕРТИКАЛИ»

Тема опыта

Использование приёма «Повторение по вертикали» для повышения у учащихся 10 – 11 классов знаний при организации итогового повторения на уроках математики (алгебраический компонент).

Актуальность опыта

В настоящее время школьный курс математики далеко отстаёт от математики как науки по уровню обобщённости знаний. Если в современной математике уровень обобщенности очень высок, то в школьном курсе математики пока ещё весьма низок. Его повышение (в разумных пределах) приведёт к повышению информационной ценности изучаемых знаний, и также к сокращению времени на их усвоение.

Одним из важнейших вопросов, способствующих повышению степени обобщённости знаний, достижению глубоких и прочных знаний у учеников, является повторение ранее пройденного материала.

Работа над обобщением и применением ведущих идей школьного курса математики осуществляется при повторении, при этом необходимым элементом системного подхода к повторению является специальным образом организованная система задач. От того, какова структура, содержание, последовательность, степень обобщенности идеи в решении задачи, зависит эффективность повторения [1].

Общие методы решения, их классификация – мощное скрепление основных направлений курса. При итоговом повторении в конце учебного года должен быть отобран самый важный материал с точки зрения общеобразовательной ценности, упражнения комплексного характера. «Нет никакой надобности повторять выученное в том порядке, в каком оно было пройдено, а напротив, ещё полезнее повторения случайные, сводящие выученное в новые комбинации», – отмечал в своё время К. Д. Ушинский [2, с. 52].

Цель опыта

Обоснование эффективности использования приёма «повторение по вертикали» для повышения у учащихся уровня обобщённости изучаемых знаний по математике, что в свою очередь способствует повышению качества знаний.

Задачи опыта

- повысить у учащихся степень обобщенности знаний по математике посредством использования приёма «повторение по вертикали» на этапе итогового повторения;
- разработать набор практических упражнений, базирующихся на приёме «повторение по вертикали»;
- выявить динамику результатов учебной деятельности в период работы над данной темой.

Длительность работы над опытом

Работала в данном направлении в течение трёх лет (2010 – 2013). Изучив статью «Повторение «по вертикали» Е. А. Карповой, преподавателя Лицея БГУ, где был изложен один из подходов к повторению материала на подготовительных курсах Лицея БГУ [3], попыталась реализовать данный подход при организации итогового повторения в старших классах, расширив при этом свой набор подходов, способствующих, с моей точки зрения, повышению степени обобщённости знаний учащихся.

Этапы работы над опытом

1 этап

Выявление учебного материала, требующего конкретной подачи с учётом задач итогового повторения, анализ общеобразовательной программы, анализ календарно-тематического планирования, выявление особенностей учебных занятий данного типа, анализ сборников задач для экзамена по учебному предмету «Математика», анализ сборников тестов для подготовки к ЦТ.

2 этап

Подбор и систематизация заданий, соответствующих тематике итогового повторения с учётом указанного подхода.

3 этап

Применение указанной системы упражнений на учебных занятиях итогового повторения.

4 этап

Рефлексия (анкетирование учащихся с целью выяснения вопросов, связанных с отношением учащихся к учебным занятиям, их мотивацией, учебными результатами, возможными путями улучшения работы). Диагностика результатов учебной деятельности (итоговая контрольная работа).

Оценка эффективности применения данного подхода при организации итогового повторения. Выявление динамики роста учебных достижений (итоги выпускного экзамена).

Ведущая идея опыта

В основу подхода «повторение по вертикали» положен содержательный компонент: задачи, решаемые в разное время или в разных темах, или в разное время и в разных темах, объединяются и рассматриваются вместе. При таком повторении устанавливаются связи между знаниями, не объединённые при первоначальном обучении.

Описание опыта

Учитывая целевые установки образовательного процесса в старших классах, а именно: обеспечение подготовки выпускников для поступления в вузы, при организации итогового повторения считаю целесообразным использовать идею укрупнения дидактических единиц (УДЕ). Благодаря указанному подходу повторение знаний осуществляется структурно, целостным информационным комплексом, что позволяет избежать перегрузки в старших классах. Сформировавшаяся система знаний – важнейшее средство предотвращения их забывания. Забытые знания быстрее восстанавливаются в системе.

Дидактической единицей может быть совокупность вопросов или групп задач, отрабатываемых, как правило, в пределах одного урока. П.М. Эрдниев указал три основных способа укрупнения дидактических единиц:

1) совместное и одновременное изучение взаимосвязанных вопросов программы;
2) решение прямой задачи и преобразование ее в обратные или аналогичные;
3) усиление удельного веса творческих заданий [4].

Таким образом, лейтмотивом урока, построенного по технологии УДЕ, служит правило: изучать не все понемногу, а многое об одном, о главном, постигая многообразие в целом.

При обобщении материала на уроках итогового повторения я использую идею УДЕ, при этом укрупнение дидактических единиц провожу по следующим направлениям:

1) укрупнение теоретического материала по принципу сопоставления родственных и противоположных свойств (например, арифметическая и геометрическая прогрессии);
2) укрупнение по единому алгоритму, (например, общая схема исследования свойств функции);
3) задачи, решаемые в рамках одной темы, но в разное время (в разных классах), объединяются и рассматриваются вместе (например, уравнения, имеющие структуру квадратного или однородного) [**Приложение 1**];
4) демонстрация разных способов решения одной задачи [**Приложение 2**];
5) укрупнение по содержательному компоненту, базой которого является метод решения: всевозможные по форме, но одинаковые по содержанию задачи, решаемые в разных темах и в разное время, объединяются и рассматриваются вместе. Именно такой подход (от метода к задаче), где по пути создания новой информации, устанавливая связи между знаниями, не объединенными при первоначальном обучении, предлагает Е.А. Карпова [3].

Все указанные укрупнения назовём «Повторение по вертикали».

Для иллюстрации указанного подхода к повторению привожу «паспорт» данного класса упражнений, основанном на методе выделения полного квадрата [**Приложение 3**].

Система упражнений, составленных на основе метода выделения полного квадрата в **Приложении 4**.

В **Приложении 5** указан «паспорт» и система упражнений, основанных на методе «Использование геометрической интерпретации при решении алгебраических задач» [**Приложения 6, 7**]. С моей точки зрения, именно этот метод решения задач способствует интеграции курса алгебры и геометрии, что в конечном итоге повышает степень обобщённости знаний учащихся по курсу «математика».

Целесообразно включить в рассмотрение графический метод решения текстовых задач, так как задания по этой теме обязательно присутствуют в тестах и являются, как правило, самыми сложными для учащихся. Традиционно текстовые задачи решаются арифметическим или алгебраическим способом. При решении заданий во время тестирования, безусловно, имеет значение не только правильность, но и быстрота решения. Графический метод во многих случаях является рациональным, значительно упрощает решение, ведёт к более быстрому получению ответа. Помимо отмеченного, указанный способ решения позволяет рассматривать межпредметные связи: «Графики движения» (физика) и «Решение текстовых задач на движение и совместную работу» (математика). Система задач указана в **Приложениях 8, 9**.

Учитывая, что цели обобщающего и итогового повторения аналогичны, материал повторения (отбор существенного) весьма близок, указанные подходы к организации итогового повторения можно использовать и на уроках обобщающего повторения. В этом случае содержательная линия укрупнения будет более узкая (тематическая).

На уроках итогового (обобщающего) повторения использую **следующие приёмы**, отмеченные в работах А.Г. Гина.

- ***Составление опорного конспекта***

Ученик (группа учащихся) составляет авторский опорный конспект всей ранее изученной темы. При этом возможны варианты:

1) не обязательно всем классом повторять таким образом одну тему. Разные группы учащихся повторяют разные темы, после чего попарно раскрывают друг другу свои конспекты;
2) объявление конкурса на «универсальную шпаргалку» по данной теме;
3) составление конспекта в сочетании с приёмом «лови ошибку», когда ошибка специально закладывается в опорный конспект.

- ***Повторяем с контролем***

Учащиеся разрабатывают списки контрольных вопросов по ранее изученным темам.

- ***Пересечение тем***

Учащиеся подбирают свои задачи, вопросы, связывающие последний изучаемый материал с любой темой, указанной учителем. Такой приём позволяет каждый раз посмотреть на свои знания немного под другим углом зрения [6].

Результативность опыта

Любая деятельность учителя оценивается по степени обученности его учеников, по результатам мониторинга качества знаний учащихся.

Данный подход («Повторение по вертикали») применяла на протяжении 2011/12 и 2012/13 учебных годов, работая с одними и теми же учащимися в 10 и 11 классах. В начале учебного года, у десятиклассников проводилась контрольная работа (входной контроль) В конце каждого учебного года проводилась итоговая контрольная работа.

На протяжении двух лет обучения наметилась положительная динамика, а к концу 2012/2013 учебного года результаты значительно улучшились и стабилизировались.

Заключение

Анализируя работу по указанной системе (укрупнение дидактических единиц, используя подход «Повторение «по вертикали»), можно сделать следующие выводы:
1) знания, даваемые блоком, лучше воспринимаются и усваиваются учащимися;
2) учащиеся успешнее осваивают программу, повышается интерес и осознанное применение знаний;
3) развивается память, мышление, внимание, так как любое задание требует от учеников не механического действия, а осмысленного решения.

Литература

1. **Пирютко, О. Н.** Обобщающее повторение на уроках и факультативных занятиях / О.Н. Пирютко. – Матэматыка. Праблема выкладання. – 2012. – № 6.
2. **Ушинский, К. Д.** Человек как предмет воспитания / К. Д. Ушинский. – М.: Фаир-Пресс, 2004.
3. **Карпова, Е. А.** Повторение «по вертикали» / Е.А.Карпова. – Матэматыка. Праблемы выкладання. – 2000. – №1.
4. **Эрдниев, П. М.** Укрупнение дидактических единиц в обучении математики / П.М. Эрдниев ,Б.П.Эрдниев. – М.: Просвещение, 1986.
5. **Запрудский, Н. И.** Современные школьные технологии / Н. И. Запрудский. – Минск: Сэр-Вит, 2003.
6. Гин, А. Г. Приёмы педагогической техники / А. Г. Гин. – 5-е изд. – М.:Вита –Пресс, 2004.
7. **Пирютко, О. Н.** Графический метод / О. Н. Пирютко. – Минск: Новое знание, 2010. – С. 26.
8. **Пирютко, О. Н.** Задачи по математике повышенной сложности с решениями / О.Н. Пирютко. – Минск: Новое знание, 2011, с. 82.
9. **Чернявская, С. В.** Геометрический подход в решении нестандартных задач по алгебре / С.В. Чернявская, Н.И. Холдобина – Матэматыка. Праблема выкладання. – 2012. – № 4. – С. 3.

Приложение 1

Уравнения, приводимые к квадратным или однородным

Квадратные уравнения вида:

$Ax^2 + Bx + C = 0$

Тригонометрические уравнения

- $A\cos^2 x + B\cos x + C = 0$
- $A\sin^2 x + B\cos x + C = 0$
- $A\cos 2x + B\cos x + C = 0$
- $A\,\mathrm{tg}\,x + B\,\mathrm{ctg}\,x + C = 0$
- $A(\sin x + \cos x) + B\sin x \cdot \cos x + C = 0$

Иррациональные уравнения

- $A\sqrt[n]{g(x)} + B\sqrt[2n]{g(x)} + C = 0$
- $Ag(x) + B\sqrt[n]{g(x)} + C = 0$

Показательные уравнения

- $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^{x} + C = 0$

Логарифмические уравнения

- $A\log_a^{2n} g(x) + B\log_a^{n} g(x) + C = 0$

Однородные уравнения

- $A x^2 + B xy + C y^2 = 0$
- $A \cos x + B\sin x = 0$ – однородное тригонометрическое уравнение первой степени
- $A\cos^2 x + B\sin x \cos y + C \sin^2 x = 0$ – однородное тригонометрическое уравнение второй степени
- $A\, a^{2n} + B\, a^{n} b^{m} + C\, b^{2m} = 0$ – однородное показательное уравнение

Приложение 2

Одна задача – разные способы

Часто полезнее решать одну и ту же задачу тремя способами, чем решать три – четыре разные задачи. Решая одну задачу разными методами, можно путём сравнения выяснить, какой из них короче и эффективнее. Так вырабатывается опыт.

У. Сойер

Способы решения уравнения вида *sinx* + *cosx* = 1

- Введение вспомогательного угла
- Использование универсальной тригонометрической подстановки

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

- Сведение к однородному уравнению (используя формулы половинного аргумента)
- Преобразования суммы в произведение (предварительно выразив *cosx* через *sin* (π/2 – *x*))
- Возведение в квадрат обеих частей уравнения (этот способ требует отбора решений)
- Замена *cosx* выражением $\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$

Приложение 3

Метод выделения полного квадрата [3]

Тема	Типы задач
Делимость целых чисел	• докажите, что число является целым (составным) • докажите, что число является квадратом некоторого числа
Рациональные дроби	• докажите, что значение выражения неотрицательно • сократите дробь • докажите, что из одного равенства следует другое
Квадратные корни	• упростите выражение • разложите на множители
Квадратные уравнения	• найдите по теореме Виета $x_1^2 + x_2^2$ • найдите, при каких значениях параметра выражение $x_1^2 + x_2^2$ принимает наименьшее (наибольшее) значение • исследуйте расположение корней квадратного трехчлена относительно точки в случае $D = (\ )^2$
Неравенства	• докажите неравенства с помощью выделения полного квадрата, неравенства Коши
Квадратичная функция. Рациональные неравенства	• постройте графики квадратичной функции • найдите наименьшее (наибольшее) значение • решите задачу на оптимизацию
Уравнения, Системы уравнений	• решите уравнения стандартного вида на выделение полного квадрата • решите уравнения двумя переменными • решите нестандартные системы уравнений

Приложение 4

Класс упражнений на метод выделения полного квадрата

1. Число $a+\frac{1}{a}$ – целое. Докажите, что число $\frac{a^2+1}{a^2}$ является целым
2. Докажите, что следующее число является составным:
   а) $2^{10} + 5^{12}$;
   б) $4 \cdot 10^{100} + 1$.

3. Докажите, что при всех значениях переменных значение выражения $x^2 + 19y^2 + 6z^2 - 8xy - 4xz + 12yx$ неотрицательно.

4. Решите уравнение с двумя переменными $20x^2 + y^2 - 4xy + 24x + 9 = 0$

5. При каких значениях x и y выражение $4x^2 + 12xy + 12y^2 + 4x - 12y + 9$ принимает наименьшее значение. Найдите его.

6. Докажите, что при всех значениях переменной x значение выражения

   $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ неотрицательно.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y=x(x+1)(x+1)(x+2)(x+3)+4$.

8. Упростить выражение:
   а) $\sqrt{9-4\sqrt{4-\sqrt{5}}}$;
   б) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$.

9. Решить уравнение:
   а) $x^2 - (2a - 4) - 8a = 0$;
   б) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1=1.}}$

10. Не вычисляя корней уравнения $3x^2 + 8x - 1 = 0$, найдите $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^4 + x_2^4$.
11. Из всех прямоугольников данного периметра найдите тот, площадь которого наибольшая.

Приложение 5

Паспорт «Использование геометрической интерпретации при решении алгебраических задач».

Тема	Типы задач
Тригонометрические функции (обратные тригонометрические функции)	• найдите значения тригонометрических функций • найдите значения обратных тригонометрических функций)
Иррациональные уравнения	• решите уравнение
Системы уравнений	• найдите решения системы, удовлетворяющие заданному условию
Функции	• найдите наибольшее (наименьшее) значение функции
Текстовые задачи	• решите задачу на движение • решите задачу на совместную работу

Язык формул и расстояний

Изучение языка невозможно начать без словаря или хотя бы разговорника. В математике этот словарь-разговорник довольно прост: в нём всего три строчки (таблица).

Алгебраический язык (язык формул)	Геометрический язык (язык расстояний)
Числа и буквы	Расстояния до координатных осей (координаты)
Модуль разности двух чисел	Расстояние между двумя точками координатной прямой
Сумма квадратов двух чисел	Квадрат расстояния между двумя точками координатной плоскости

Система упражнений по теме: «Использование геометрической интерпретации при решении алгебраических задач»

Задача 1 [8]

Найдите наименьшее значение функции $y=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}.$ Решение. Представим данную функцию $y=\sqrt{(x-3)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(0-3)^2}$. Каждое слагаемое можно рассматривать как расстояние между точками: A(x; 0) и B(3; 2); A(x; 0) и C(7; 3). AB + AC будет наименьшей, если точка A является пересечением оси абсцисс с прямой BC', где точка C' симметрична точке C относительно оси абсцисс, C'(7; -3). Наименьшее значение функции равно BC'. Ответ: $\sqrt{41}$.

Задача 2 [8]

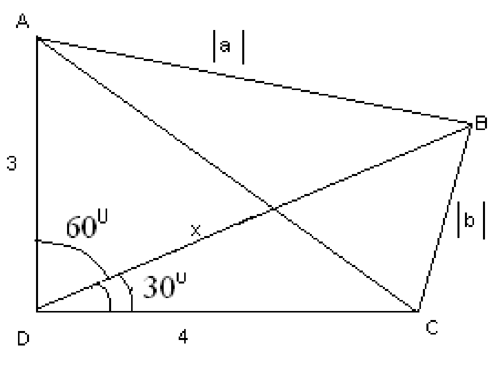
Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2,\\ x^2+y^2-4x=0.\end{cases}$$

Решение. Рассмотрим точки A(x; y), B(1; 0), C(-1; 0). Тогда по формуле расстояния между двумя точками имеем: $|AB|=\sqrt{(x-1)^2+y^2};|AC|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$. Первое уравнение примет вид: $|AB|+|AC|=2.$Второе уравнение системы: x^2 – $4x$ + 4 + y^2 = 4; (x – 2)^2 + y^2 = 2^2 – уравнение окружности с центром (2; 0) и радиусом 2. Следовательно, A($x; y$) = A(0; 0). Ответ: (0; 0).

Задача 3 [9]

Найдите наименьшее значение выражения $f(x)=\sqrt{x^2-3x+9}+\sqrt{x^2-4\sqrt{3}x+16}.$ Решение. Обозначим через a^2 первое подкоренное выражение, через b^2 – второе, преобразуя их следующим образом:

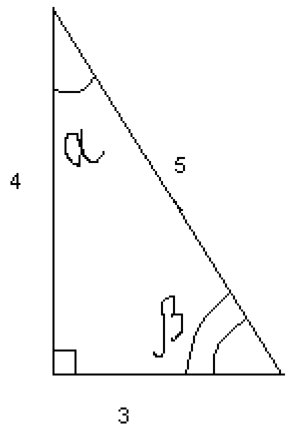


$$a^2=x^2-3x+9=x^2+3^2-2\cdot 3x\cdot\cos 60^0;$$
$$b^2=x^2-4\sqrt{3}x+16=x^2+4^2-2\cdot 4x\cdot\cos 30^0.$$

Тогда $f(x)=\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=|a|+|b|.$ Значение $f(x)$ можно рассматривать как длину ломаной ABC (рис.). Заметим, что $f_{наим}$ = AC, где AC – гипотенуза прямоугольного треугольника ADC, катеты которого равны 3 и 4. Поэтому $f_{наим}=\sqrt{3^2+4^2}=5.$ Ответ: 5.

Задача 1 [9]. Интересным представляется решение задач на вычисление значений обратных тригонометрических функций без применения формул тригонометрии. Основная идея заключается в том, чтобы удачно скомпоновать в одной фигуре несколько прямоугольных треугольников, из которых сразу видно решение.

Вычислите значение выражения $arctg\frac{3}{4}+\arccos\frac{3}{5}$.



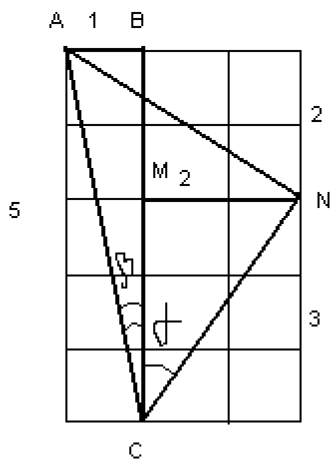
Решение. Пусть $arctg\frac{3}{4}=\alpha;\arccos\frac{3}{5}=\beta$.

Из определения обратных тригонометрических функций следует, что α и β - острые углы прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4, гипотенузой 5. Решение получим из рисунка. α + β = 90^0. Ответ: 90^0

Задача 2.

Вычислите значение выражения $arctg\frac{2}{3}+arcctg5$.

Решение.

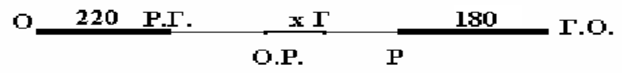


Аналогично предыдущему примеру $arctg\frac{2}{3}=\alpha$ – острый угол прямоугольного треугольника с катетами 2 и 3, $\beta=arcctg5$- острый угол прямоугольного треугольника с катетами 5 и 1. Основная сложность состоит в том, чтобы совместить эти треугольники на одном чертеже, из которого значение α + β станет очевидным. Рис. В треугольнике ABC AB = 1, BC = 5. Следовательно, $\angle ACB=\beta$. В треугольнике NMC MN = 2, MC = 3. Следовательно, $\angle MCN=\alpha$. Треугольник ANC – прямоугольный и равнобедренный, поэтому α + β = $\angle ACN=45^0$. Ответ: 45^0.

Решение текстовых задач графическим способом

Задача 1[7]

Грибник и рыболов находятся на расстоянии 220 м от охотника. Когда охотник догнал грибника, рыболов отставал от них на 180 м. На каком расстоянии от рыболова был грибник, когда охотник догнал рыболова?



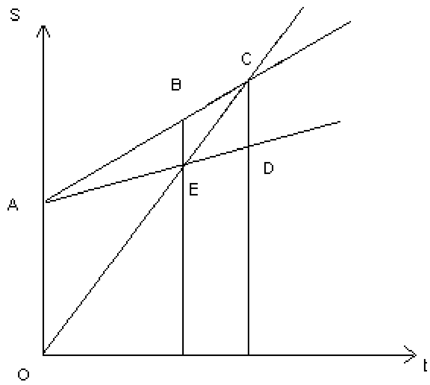
Решение 1 (арифметическое)

V_{op}-скорость сближения охотника и рыболова, $V_{oг}$- скорость сближения охотника с грибником. Когда охотник догнал грибника, он прошёл расстояние 220 + 180 = 400 (м). $V_{oг}$ соответствует путь, равный 220 м, а V_{op}- 400 м. Тогда $\frac{V_{oг}}{V_{op}} = \frac{220}{400} = \frac{11}{20}$. Тогда $V_{oг}$ соответствует искомый путь, а V_{op}=180 м. Когда охотник догнал рыболова, $S_{pг}$= $180 \cdot \frac{11}{20} = 99$ (м). Ответ: 99 м.

Решение 2 (алгебраическое)

$T_{oг} = \frac{220}{V_o - V_г}$; $S_p = \frac{220}{V_o - V_г} \cdot V_p$; $S_г = \frac{220}{V_o - V_г} \cdot V_г$- количество пути, после чего расстояние между ними было $\frac{220}{V_o - V_г}\left(V_г - V_p\right)$= 180. $S_{pг} = \frac{220}{V_o - V_p}\left(V_г - V_p\right)$. Из предыдущего уравнения выразим: $V_p = \frac{400V_г - 180V_o}{220}$ и подставим в $S_{pг}$, упрощая, получим $S_{pг} = 99$ м. Ответ: 99 м.

Решение 3 (с помощью графиков)



Графики движений грибника (AC), рыболова (AD) и охотника (OC), OA = 220 м, CD = 180 м, BE = x м, искомое расстояние. Рассмотрев пары подобных треугольников (OAC и EBC, BAE и CAD), получим уравнения: $\frac{x}{220} = \frac{BC}{AC}; \frac{x}{180} = \frac{AB}{AC}$, сложив эти уравнения, получим: $\frac{x}{220} + \frac{x}{180} = 1, x = 99$. Ответ: 99 м.

Приложение 9

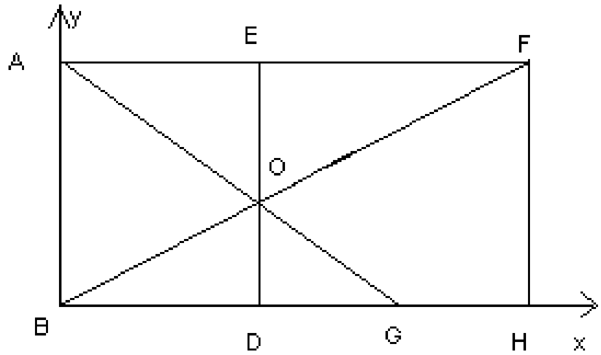
Задачи на совместную работу

Задача 1[9]

Две бригады совместно обработали участок земли за 12 ч. За какое время могла бы обработать этот участок каждая из бригад в отдельности, если скорости выполнения работы бригадами относятся как 3 : 2?

Решение.

Пусть $q(x)$ = BF – величина части участка земли, обработанной первой бригадой за время x, $p(x)$ = AG– аналогичная зависимость для второй бригады. Построим графики этих соответствий на координатной плоскости. Точка пересечения этих графиков соответствует моменту окончания одновременного выполнения работы двумя бригадами.



Пусть v_1 и v_2 – скорости выполнения работы первой и второй бригадами соответственно. По условию: $v_1 : v_2 = 3 : 2$. С другой стороны, v_1 = AB / BH, v_2 = AB / BG = 3 : 2. Из подобия треугольников BOD и FOE, BOG и FOA имеем: $\frac{BD}{EF} = \frac{BO}{OF}(1); \frac{BG}{AF} = \frac{BO}{OF} \Leftrightarrow \frac{BG}{BH} = \frac{BO}{OF}(2).$

Из равенств (1) и (2) следует: $\frac{BD}{EF} = \frac{BG}{BH} \Leftrightarrow \frac{12}{EF} = \frac{3}{2} \Rightarrow EF = 18$(ч). BH = BD + DH = BD + EF = 12 + 18 = 30 (ч). BG = $\frac{2}{3}$BH = $\frac{2}{3} \cdot 30 = 20$ (ч). Ответ: 20 ч; 30 ч.