Нетрадиционные способы решения неравенств и задач

И. Н. Болейчук,
заместитель директора по учебной работе
Крошинской СШ Барановичского района

Задание 4 (10 класс). Для всех $x, y \in [0; 1]$ доказать неравенство: $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$.

Доказательство. Рассмотрим две последовательности:

$\begin{matrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{1+xy} & \frac{1}{1+xy} \end{matrix}$ и случай, когда $x > y$. Заменив y на x, мы увеличим знаменатель, зн. уменьшим дроби, тогда получим: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{1+xy} & \frac{1}{1+xy} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{1+x^2} & \frac{1}{1+x^2} \end{bmatrix}$, из чего следует: $\frac{2}{1+xy} \geq \frac{2}{1+x^2}$.

Случай, когда $x<y$. Заменив x на y, мы увеличим знаменатель, а значит, уменьшим дроби, тогда получим: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{1+xy} & \frac{1}{1+xy} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{1+y^2} & \frac{1}{1+y^2} \end{bmatrix}$, из чего следует: $\frac{2}{1+xy} \geq \frac{2}{1+y^2}$. Сложим полученные неравенства: $\frac{4}{1+xy} \geq \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+y^2}$, поделим обе части на 2, что и требовалось доказать.

Задание 5 (11 класс). Для всех $x, y \in [0; 1]$ доказать неравенство: $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq 1$.

Доказательство. Рассмотрим две последовательности:

$\begin{matrix} x & y \\ \frac{1}{1+y} & \frac{1}{1+x} \end{matrix}$. Если $x > y$, то $\frac{1}{1+y} > \frac{1}{1+x}$ (последовательности одномонотонны).Получим: $\begin{bmatrix} x & y \\ \frac{1}{1+y} & \frac{1}{1+x} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x & y \\ \frac{1}{1+x} & \frac{1}{1+y} \end{bmatrix}$, из чего следует: $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}$. Теперь докажем, что $\frac{x}{1+x}$ и $\frac{y}{1+y}$ будут не больше $\frac{1}{2}$.

Так как $0 \leq x \leq 1$, то $x + x \leq 1 + x$, тогда $2x \leq 1 + x$. Поделим обе стороны неравенства на положительное выражение 2(x+1): получим $\frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{2}$, также доказываем, что $\frac{y}{1+y} \leq \frac{1}{2}$. Тогда $\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \leq 1$. Неравенство доказано.