Математика в старших классах:
первые шаги к научным исследованиям

Л. С. Аристова,
учитель математики высшей категории
Речицкого районного лицея

Сегодня происходит снижение мотивации к усвоению математических знаний. Возникают противоречия между высокими требованиями к качеству знаний выпускников школы и снижением мотивации, интереса учащихся к предмету; возникает противоречие между перегруженностью программного материала по математике и необходимостью личностного развития учащихся средствами предмета. Проблема снижения уровня мотивации и самостоятельности учащихся побудила меня пересмотреть взгляды на преподавание математики.

В последние годы технология исследовательской деятельности учащихся становится всё более популярной. Проводятся многочисленные педагогические конференции, конкурсы исследовательских работ, школьные, межшкольные и региональные ученические конференции и турниры. Это связано с тем, что реализация исследовательского обучения более или менее успешно решает многие проблемы и задачи современного образования: развитие исследовательской компетентности, творческого потенциала учащихся и их учебной мотивации, преодоление недисциплинированности, профессиональное самоопределение школьников и др. [1, с. 123]

Организацию исследовательской деятельности учащихся в школе следует выстраивать поэтапно: подготовительный этап (2-6 классы); развивающий (7-8 классы); собственно исследовательский (9-11 классы). Срок обучения в лицее 2 года, за это время учащимся нужно проявить свои способности в различных областях лицейской жизни. И основная цель моей работы – заинтересовать учащихся исследовательской деятельностью.

За годы работы в лицее у меня сложилась система вовлечения учащихся в исследовательскую деятельность: решение задачи на уроке – лицейская конференция – районная и областная конференция – республиканская и международная конференции.

Любить науку, заниматься одной из ее отраслей – это одно. А вот взращивать любовь к научным исследованиям, показывать, как это интересно, искать что-то новое, учить азам исследовательской работы – это совершенно другое. Заниматься исследовательской деятельностью в учреждениях образования не просто. В процессе исследования формируются такие качества, как организованность, способность разумно планировать и упорядочивать ход своей деятельности, дисциплинированность. Учащийся должен сознательно подчиняться определенным нормам поведения при работе над исследованием. И нужно приучить его к самоконтролю, ведь исследовательская работа требует подчинять свое поведение решению сознательно поставленных задач. Кроме того, необходимо выработать и навыки рефлексии – умения самостоятельно проанализировать свои действия с детальным разбором как положительных, так и отрицательных действий. При этом надо учесть, что мотивацию и потребность к поисковой интеллектуальной работе надо ещё взрастить из естественной любознательности и любопытства.

Мы познаём мир лучше, когда действуем. Это подтверждают и слова Б.Шоу: «Единственный путь, ведущий к знанию, – это деятельность». Каждый ребёнок изначально – исследователь, поэтому моя педагогическая задача – помочь ему раскрыться, «разбудить», развить его способности, одарённость, которые по той или иной причине пока не проявились в должной мере.

Мы активно привлекаем к исследовательской деятельности учащихся 9 классов, которые занимаются на курсах «Вечерний лицей» и планируют поступать в лицей. Практика последних лет показывает, что большинство этих ребят (далее – курсанты) имеют слабую теоретическую и практическую подготовку по математике. Поэтому необходимо не только дать им знания по математике, но и научить их учиться на основе исследовательского подхода к решению математических и прикладных задач.

Во время занятий не только четко и ясно излагаю материал, но и создаю проблемные ситуации, решению которых способствуют мини-дискуссии. Обращаюсь к аудитории с вопросами, как лучше сформулировать то или иное утверждение, является ли утверждение необходимым или достаточным, как доказать и т. д. Я собрала коллекцию задач под названием «Удиви меня» *(приложение 2)*.

На практических занятиях творческие и исследовательские навыки курсантов проявляются при рассмотрении различных подходов к решению той или иной задачи, определении ее оптимального решения (*приложение 2*). После совместного решения типовой задачи или примера предлагаю задачи для самостоятельной работы. Разбираю с курсантами решение этих задач, указываю на оптимальное решение, рекомендую по отдельным вопросам дополнительную литературу, предлагаю индивидуальные задания (эту работу нужно обязательно проконтролировать).

Тем курсантам, которые заинтересовались дополнительным материалом, предлагаю принять участие в районных чтениях «Золотые россыпи», где можно выступить с рефератом по изученной теме или решить исследовательскую задачу. Успешно реализован эксперимент «Исследовательские работы курсантов». Так курсанты становятся исследователями и потенциальными абитуриентами лицея.

Для повышения мотивации мы также апробировали кураторство, когда работой курсантов руководит учащийся лицея, уже выступавший на конференциях, где он показал отличный результат.

Все, что выше описано, это первые шаги мотивации учащихся к исследовательской деятельности и, конечно же, мотивация к успешному обучению в лицее. Ведь именно курсанты, поступившие в лицей, в сентябре начинают решать задачи республиканского турнира юных математиков (РТЮМ).

При организации исследовательской деятельности я: **мотивирую учащихся** – создаю условия для постановки личных целей; демонстрирую значимость исследовательской деятельности и ее результатов; **обучаю** – оказываю помощь, консультирую, в случае необходимости конкретизирую неявные проблемы, ставлю наводящие вопросы; **стимулирую** – предъявляю требования, даю возможность достижения успеха, своевременно и регулярно проверяю и оцениваю выполняемую работу, применяю различные виды поощрения. Уровень подготовленности учащихся определяет возможность их включения в исследовательскую деятельность.

Подготовка к исследовательской деятельности. Необходимо научить работать с первоисточниками, научной и публицистической литературой, самостоятельно находить и анализировать информацию. Результатом может быть доклад на уроке.

Написание рефератов по выбранной теме. Учащиеся усваивают и закрепляют некоторые теоретические методы исследования, способы работы с литературой, приобретают навыки оформления исследовательской работы. Рефераты могут быть представлены на уроках, на конференциях в лицее или заседаниях научного общества.

*Собственно исследовательская работа учащихся, которая п*редполагает исследовательский поиск и практическую значимость. Проводится во внеурочное время.

Развитие исследовательских навыков учащихся происходит и на уроках, в первую очередь – при формировании новых знаний, поскольку закономерности изучения новых понятий, доказательства теорем и т. д. предполагает включение учащихся в активный мыслительный процесс. Пример. Предлагаю учащимся 11-го класса поисковые работы по нахождению поверхностей и объемов многогранников различных видов. При изучении темы “Поверхность наклонной призмы” провожу групповую работу: I группа находит боковую поверхность правильной призмы, II группа – площадь боковой поверхности прямой призмы, III группа – площадь боковой поверхности наклонной призмы. Перед участниками поставлена проблема: всегда ли можно находить поверхность призмы по формуле $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} * H$?

Учащиеся заметили, что если дана наклонная призма, то необходимо находить площадь каждой грани, а уж затем их сумму. Задание: найти наименьшее число измерений для определения боковой поверхности призмы. Возникает догадка: раз все боковые ребра призмы равны, то достаточно принять за основание каждого параллелограмма ее боковое ребро, а за высоту – сторону перпендикулярного сечения призмы. Обобщая полученные наблюдения, учащиеся выводят формулу поверхности призмы через периметр перпендикулярного сечения, справедливую для любого вида призм.

Такая поисковая деятельность при проведении практических работ развивает познавательную активность учащихся, дает возможность самостоятельно сделать вывод, доказать теорему.

Особое внимание следует обращать на задания, которые формируют умение анализировать, сравнивать, обобщать, выделять главное, контролировать и планировать свою деятельность. Так, при изучении темы «Правильные многогранники» предлагаю учащимся задание: составить конспект по вопросам карты урока (*приложение 3*).

Исследовательская деятельность учащихся при изучении математики связана прежде всего с решением задач. Формулировка турнирных исследовательских задач отличается от тех, которые мы решаем на уроках и на факультативных занятиях. В исследовательской задаче для начинающих есть параметр, по которому можно двигаться в исследовании, т.е. легко определяется последовательность частных случаев, так что в каждый момент учащийся сам понимает, что делать дальше. И к идее доказательства можно прийти, последовательно двигаясь по этому параметру. Для более опытных исследователей в задаче есть вспомогательные «подзадачи», при помощи которых мы продвигаемся, уточняем, обобщаем, при доказательстве используем разные методы. Часто олимпиадную задачу мои учащиеся рассматривают как «подзадачу» для исследования и затем выстраивают исследовательские темы. Новизна не в задаче, а в подходе к работе учащегося.

Внеклассная работа – еще одна форма, которая формирует устойчивый интерес к математике. Математические соревнования и игры являются своего рода контролем усвоения рассмотренного материала, психологической подготовкой к будущим олимпиадам. Здоровое соперничество между несколькими более сильными учащимися в соревнованиях, нежелание уступить друг другу способствуют тому, что ребята начинают читать больше дополнительной литературы, активнее участвуют во внеклассной работе.

Формы внеклассной работы могут быть самыми разнообразными, одной из самых сложных является **математический турнир** – командные соревнования учащихся в умении решать математические задачи, грамотно и убедительно представлять рефераты, аргументированно отстаивать свою точку зрения в публичных дискуссиях. Основные цели турнира состоят в привлечении учащихся к исследовательской работе в области математики и привитии им навыков проведения коллективных научных исследований, представления и защиты своих результатов, ведения научной дискуссии в формах, принятых математическим научным сообществом. Так как в РТЮМ может участвовать только одна команда, а желающих много, я провожу лицейский этап турнира. Математический турнир в лицее – это своего рода тренировка перед ОТЮМ.

Задания областного и республиканского турниров довольно сложные, они не похожи ни на задачи из учебника, ни на олимпиадные задачи, так как имеют исследовательский характер, интересны как с теоретической, так и с практической точек зрения. Решать такие задания приходится долго – в течение двух месяцев, задания делим между членами команды. Причем слово «решать» означает не только поиск идей, методов, алгоритмов, доказательств и т. п., но и дополнительной литературы, изучение информации, сравнение с известной, тренировка определенных навыков проведения исследования, оформления результатов, обоснований, подготовка презентаций и докладов.

Так как много усилий уходит у учащихся на оформление исследования, я предлагаю памятку, в которой дана последовательность действий при написании исследовательской работы.

На самом турнире необходимо выступить с публичным докладом по результатам, суметь разъяснить их слушателям, отстоять в дискуссии с оппонентами, убедить жюри и зрителей в правильности своей точки зрения. Более того, нужно по достоинству оценить решения соперников и их выступления.

Исследовательскую деятельность организую и вне урока, используя для этого:

1. Заседания физико-математической секции научного общества лицеистов «Фотон» (НОЛ). Эта форма учебной деятельности, сочетающая работу над учебными исследованиями с коллективным обсуждением промежуточных и итоговых результатов, предполагает проведение круглых столов, дискуссий, конференций, публичных защит, а также встреч с представителями науки и образования, сотрудничество с учениками других образовательных учреждений.

2. Научные семинары, лекционно-практические занятия, которые проходят два раза в месяц, веду совместно с преподавателями вузов.

3. Обучение в летней республиканской научно-исследовательской школе учащихся и учителей, работающей на базе спортивно-оздоровительного комплекса «Бригантина» Белорусского государственного университета.

4. Публикации работ учащихся в электронных сборниках Международной научно практической конференции «Первые шагу в науку» (г. Брянск), в лицейских сборниках исследовательских работ.

5. Участие в сборах по подготовке научных работ (докладов) команды учащихся Гомельской области к республиканскому турниру юных математиков.

Литература

1. **Запрудский, Н. И.** Современные школьные технологии – 2 / Н. И. Запрудский. – Минск: Сэр-Вит, 2010. – 256 с.
2. **Пирютко, О. Н.** Как избежать ошибок и пробрести определенный опыт исследовательской деятельности? / О. Н. Пирютко // Народная асвета. – 2014. – № 2. – С. 30–33.
3. **Леонтович А. В.**, В чём отличие исследовательской деятельности от других видов творческой деятельности // Завуч. – 2001. – № 1. – С. 45–50.

Приложение 1

Задачи из коллекции «Удиви меня»

1. О числе решений уравнения. Рассмотрим уравнение $\sqrt[3]{\overline{abcd}} = a + b + c + d$. Легко проверить $\sqrt[3]{5832} = 5 + 8 + 3 + 2$ и $\sqrt[3]{4913} = 4 + 9 + 1 + 3$. Докажите, что других решений это уравнение не имеет. Докажите, что уравнение $\sqrt[3]{\overline{abc}} = a + b + c$ имеет единственное решение $\sqrt[3]{512} = 5 + 1 + 2$. Известно, что $\sqrt[3]{17576} = 1 + 7 + 5 + 7 + 6$. Продолжите обобщение.

2. «Незаконное» сокращение. Доказать, что существует лишь три правильные дроби со знаменателями меньшими 100, которые можно привести к несократимому виду, «незаконно» зачеркнув одинаковые цифры в числителе и знаменателе. Одна из них – это дробь $\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$. Найдите остальные две дроби и докажите, что других дробей, обладающим таким свойством, не существует. Рассмотрите такие же вопросы для чисел со знаменателем меньше 1000 и т. п.

3. Бумажные кольца. Хорошо всем известен «лист Мёбиуса». Три бумажных кольца. Разрезаем ножницами первое кольцо вдоль ленты посередине, пока не вернемся в исходную точку. Результат – два кольца. Разрезая таким же образом второе кольцо, мы получим одно кольцо, которое вдвое длиннее исходного. Разрезая третье, получаем результат: два кольца слепленных друг с другом. От чего завит результат? Можно ли получить другие комбинации?

Приложение 2

Материал для самостоятельной работы (в виде отрывков исследования, вопросов, нацеливающих на имитацию работы математика-исследователя)

Попробуйте сформулировать несколько различителей арифметической и геометрической прогрессий, провести соответствующие примеры.

Задание. 1. Заполните таблицу:

№	$\mathbf{a_1}$	**D**	**n**	$\mathbf{a_n}$	$\mathbf{S_n}$
1	7	-2			12
2		- 0.3	15	-2.94	
3			12	-12.8	-166.8
4		$\sqrt{3}-3$	10		$45\sqrt{3}-125$
5	-20		-20		-20
6		0,3		5,6	55,1

Укажите, сколько величин необходимо и достаточно для определения арифметической прогрессии и почему: исследуйте, сколько величин должно быть указано в каждой строке таблицы, чтобы не допустить задач с неопределенными условиями.

2. Сформулируйте задачу по каждой строчке таблицы. Например: «Найти число членов арифметической прогрессии, у которой первый член 7, разность – 2 и сумма всех членов 12». (n=6, n=2. Две прогрессии: 7;5;3;1;-1;-3 и 7;5 имеют одну и ту же сумму).

3. Проведите анализ данных таблицы: какие из задач на арифметическую прогрессию приводят к решению квадратных уравнений, какие – к уравнениям первой степени?

Задание. Покажите, что последовательности чисел $10^3;10^6;10^9;10^{12}$…. и 1;0,1;0,01;0,001… являются геометрическими прогрессиями, одна из них – возрастающей, другая – убывающей. *Что можно увидеть привлекательного в первой последовательности?* Вспомните специальные названия ее членов, когда через каждые три разряда знаков название меняется. Определите, чему равен десятый и n-й члены каждой из этих прогрессий.

Арифметико-геометрическая прогрессия

Прогрессия $\{a_i\} = \{a_0,\ a_0 + d,\ a_0 + 2d, \ldots\}$ называется арифметической прогрессией. Сумма первых n членов называется частичной суммой и вычисляется по формуле $s_{a_i}(n) = \frac{2a_0+(n-1)d}{2}n$.

Прогрессия $\{b_i\} = \{b_0,\ qb_0,\ q^2b_0, \ldots\}$ $(b_0 \neq 0)$ называется геометрической прогрессией. Сумма первых n членов называется частичной суммой и вычисляется по формуле $s_{b_i}(n) = b_0\frac{q^n-1}{q-1}$.

Далее под суммой последовательности $\{a_i\}$ понимается сумма первых n членов a_i как функция от n.

Произведением последовательностей $\{a_i\}$и$\{b_i\}$ назовем последовательность

$\{a_ib_i\} = \{a_0b_0,\ a_1b_1,\ a_2b_2, \ldots\}$.

0.1. Докажите, что произведение двух геометрических прогрессий — геометрическая прогрессия, и найдите её сумму.

0.2. Найдите сумму $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

0.3. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

0.4. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x^k}$.

1.1. Пусть $a_i = 3i + 1$, $b_i = \frac{1}{2}\cdot 4^i$, докажите, что сумма $\{a_ib_i\}$ равна $n \cdot 2^{1+2n}$.

1.2. Пусть $a_i = di + 1$, $b_i = \frac{1}{2}\cdot 4^i$, докажите, что сумма $\{a_ib_i\}$ равна

$\frac{2}{9}\left(-3+d+4^n\left(3+d(3n-1)\right)\right)$.

1.3. Пусть $a_i = 3i+1$, $b_i = \frac{1}{2}\cdot k^i$, $k \neq 1$, докажите, что сумма $\{a_i b_i\}$ равна

$\frac{k}{2(k-1)^2}\left(4-k+k^n(-4+k+3(k-1)n)\right)$.

1.5. Пусть $a_i = di + a_0$, $b_i = b_0 q^i$ найдите сумму $\{a_i b_i\}$.

2.1. Пусть $a_i = di + a_0$, $b_i = b_0 + ei$ найдите сумму $\{a_i b_i\}$.

3. Предложите свои обобщения. В частности, можете ввести произведение трех последовательностей (исследовать случай 2 арифметические и одна геометрическая, 1 арифметическая и 2 геометрические и т.д.), произведение произвольных последовательностей и т. д. Например:

3.1. Найдите сумму $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

3.2. Найдите сумму $1^k + 2^k + \cdots + n^k$.

Приложение 3

Правильные многогранники (виртуальный урок). Карта урока

Цель: ввести понятия правильного многогранника и полуправильного многогранника, рассмотреть пять типов правильных многогранников.

Теория многогранников, в частности выпуклых многогранников, — одна из самых увлекательных глав геометрии.

Л. А. Люстерни

Сообщения учащихся в сопровождении презентации

1)Правильные многоугольники

2)Полуправильные многоугольники

3)Философская

4)Теория Кеплера

5)Многогранники в природе концепция Платона

6) Многогранники в искусстве

Правильных многогранников вызывающе мало, но этот весьма скромный по численности отряд сумел пробраться в самые глубины различных наук.

Л. Кэррол

<u>Составьте конспект</u>

1. Правильные многогранники.
2. Полуправильные многогранники.
3. Это интересно.

<u>Ответьте на вопросы</u>

1. Приведите пример многогранника, все ребра которого равные, однако он не является правильным.
2. Призма (пирамида) является правильным многогранником. Как иначе можно назвать эту призму (пирамиду)?
3. Можно ли из правильных многогранников сложить правильный многогранник? Приведите пример.
4. Многогранник сложен с двух равных правильных тетраэдров с одной их общей гранью. Можно ли считать этот многогранник правильным?
5. В форме какой фигуры выполнено здание Национальной библиотеки Беларуси?