Факультативное занятие по математике,

Н.В. Гавриленко,

учитель высшей категории, отличник образования РБ и РФ,

ГУО «Средняя общеобразовательная школа №6 г.Сморгонь»

При доказательстве неравенств, решении уравнений и систем уравнений часто бывают полезны подстановки разного рода. Учить методу подстановок необходимо специально, так как он широко применяется в высшей школе, но лишь немногие учащиеся могли бы додуматься до него самостоятельно.

Особенно трудно учащимся представить себе, что вместо переменной можно подставить… тригонометрическую функцию, поскольку при этом, как кажется, алгебраическое выражение усложняется. Однако известные свойства тригонометрических функций упрощают некоторые уравнения и неравенства, в то время как прямое алгебраическое решение оказывается более сложным.

В то же время задачи, предлагаемые к решению с помощью тригонометрической подстановки, базируются на достаточно высоком уровне владения техникой как алгебраических, так и тригонометрических преобразований. Это позволяет оценить метод решения и применить его в сходной ситуации.

Тема занятия: «Применение тригонометрической подстановки для решения алгебраических задач»

Тема рассчитана на 3 часа:

1. Лекционное занятие (1ч.).
2. Практическая часть (2ч.).

Цели:

- ✓ получение учащимися более глубоких теоретических знаний и практических навыков при изучении математики;
- ✓ развитие у них исследовательских навыков, вариативного мышления, умения обобщать и систематизировать полученные решения;
- ✓ формирование математической культуры и логического мышления.

Задачи:

- ✓ показать применение тригонометрических подстановок при решении различных задач в сравнении с алгебраическим способом решения;
- ✓ сформировать навыки использования тригонометрических подстановок в разного рода уравнений и неравенств.

Ход занятия

1. Лекция по теме «Тригонометрическая подстановка»

Тригонометрическая подстановка является одним из способов реализации метода замены переменной и используется в тех случаях, когда область определения исходного уравнения совпадает с областью значения тригонометрической функции или включается в эту область. Выбор той или иной функции при этом зависит от вида уравнения, неравенства, их систем или алгебраического выражения, которое требуется упростить.

Если из условия задачи следует, что допустимые значения переменной x определяются неравенством $|x| \le 1$, то удобны замены $x = \sin\alpha$ или $x = \cos\alpha$. В первом случае достаточно рассмотреть $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, так как на этом промежутке непрерывная функция $y = \sin x$ возрастает, поэтому каждое свое значение принимает ровно в одной точке. Непрерывная функция $y = \cos x$ убывает на промежутке $[0;\pi]$, поэтому также каждое свое значение принимает ровно в одной точке. Вот почему в случае замены $x = \cos\alpha$, достаточно взять $\alpha \in [0;\pi]$. Причем какую из двух подстановок выбрать, зависит от конкретной ситуации.

В случаях, когда переменная может принимать любые действительные значения, используются замены $x = tg\alpha,\quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ или $x = ctg\alpha,\quad \alpha \in (0;\pi)$, так как область значения функции $y = tgx$ и $y = ctgx$ на соответствующих промежутках есть множество всех действительных чисел.

Реже используются замены $x = r\sin\alpha$ или $x = r\cos\alpha$, где $r \in R,\quad r \ge 0$, а выбор значений α снова зависит от конкретной ситуации.

Когда выражение зависит от двух переменных x и y, целесообразно положить $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, где $r \in R,\quad r \ge 0,\quad \alpha \in [0;\ 2\pi)$. Такая замена законна.

Действительно, для любых x и y существует такое $r \geq 0$, что $x^2 + y^2 = r^2$. При $r \neq 0$ имеем $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$. А числа, сумма квадратов которых равна единице, по модулю не превосходят единицы и их можно рассматривать как синус и косинус некоторого угла. Геометрический смысл такой замены состоит в следующем: для каждой точки $(x;\ y)$ определяется расстояние r до начала координат и угол α наклона вектора $(x;\ y)$ к положительному направлению оси абсцисс.

Реализовать такую подстановку не так уж трудно, главное и, наверное, самое сложное – суметь ее увидеть. Поэтому важно научиться распознавать «приметы» тригонометрических подстановок.

Итак, рассмотрим применение метода тригонометрической подстановка при решении задач.

1) Иррациональные уравнения.

Иррациональные уравнения часто встречаются на вступительных экзаменах по математике, так как с их помощью легко диагностируется знание таких понятий, как равносильные преобразования, область определения и другие. Методы решения иррациональных уравнений, как правило, основаны на возможности замены (с помощью некоторых преобразований) иррационального уравнения рациональным, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием. Чаще всего обе части уравнения возводят в одну и ту же степень. Эквивалентность не нарушается при возведении обеих частей в нечетную степень. В противном случае требуется проверка найденных решений или оценка знака обеих частей уравнения. Но существуют и другие приемы, которые могут оказаться более эффективными при решении иррациональных уравнений. Например, метод тригонометрической подстановки.

Пример. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1.$$

Решение с помощью тригонометрической подстановки

Так как $1-x^2 \geq 0$, то $|x| \leq 1$. Поэтому можно положить $x = \sin\alpha,\ \ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Уравнение примет вид

$$\sqrt{\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{2}} = 1-2\sin^2\alpha \Leftrightarrow \frac{|\sin\alpha+\cos\alpha|}{\sqrt{2}} = \cos 2\alpha \Leftrightarrow \left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right| = \cos 2\alpha .$$

Положим $\alpha + \frac{\pi}{4} = u$, где $u \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$, тогда

$$|\sin u| = \sin 2u \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin u \rangle 0 \\ \cos u = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \sin u = 0 \\ \begin{cases} \sin u \langle 0 \\ \cos u = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = \frac{\pi}{3} \\ u_2 = 0 \end{array}\right. .$$

$$x_1 = \sin\left(u_1 - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$x_2 = \sin\left(u_2 - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right\}$.

Алгебраическое решение

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2} = 1-2x^2 \Leftrightarrow \frac{\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|}{\sqrt{2}} = 1-2x^2.$$

Так как $1-2x^2 \geq 0$, то $1-x^2 \geq x^2$, $\sqrt{1-x^2} \geq |x|$. Значит, $x+\sqrt{1-x^2} \geq 0$, поэтому можно раскрыть модуль

$$\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}=1-2x^2 \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}=\left(1-x^2\right)-x^2 \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}=\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1-x^2}+x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{1-x^2}+x=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{1-x^2}-x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2=1\\ x\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}4x^2+2\sqrt{2}x-1=0\\ x\geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right\}$.

Решение уравнения алгебраическим способом требует хорошего навыка проведения тождественных преобразований и грамотного обращения с равносильными переходами. Но в общем оба приема решения равноценны.

2) Системы уравнений.

На примере одной из систем повышенной сложности покажем использование метода тригонометрической подстановки.

Так как решать такие системы, не зная специальных методов, сложно.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ 4xy\left(2y^2-1\right)=1\end{cases}$$

Решение с помощью тригонометрической подстановки

Так как квадрат суммы чисел x и y равен единице, то каждое из этих чисел по модулю не превосходит единицы и их можно рассматривать как синус и косинус некоторого угла.

Поэтому можно положить $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, $\alpha \in [0;2\pi)$. Второе уравнение системы примет вид

$$4\sin\alpha\cos\alpha\left(2\cos^2\alpha - 1\right) = 1 \Leftrightarrow 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin 4\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Условию $\alpha \in [0;2\pi)$ удовлетворяют четыре значения

$$\left[\begin{array}{l} \alpha_1 = \dfrac{\pi}{8} \\ \alpha_2 = \dfrac{5\pi}{8} \\ \alpha_3 = \dfrac{9\pi}{8} \\ \alpha_4 = \dfrac{13\pi}{8} \end{array}\right. .$$

$$x_1 = \sin\alpha_1 = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad y_1 = \cos\alpha_1 = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$x_2 = \sin\alpha_2 = \sin\frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad y_2 = \cos\alpha_2 = \cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$x_3 = \sin\alpha_3 = \sin\frac{9\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad y_3 = \cos\alpha_3 = \cos\frac{9\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$x_4 = \sin\alpha_4 = \sin\frac{13\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad y_4 = \cos\alpha_4 = \cos\frac{13\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$.

Алгебраическое решение

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4xy\left(2y^2 - 1\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow 4y\sqrt{1-y^2}\left(2y^2 - 1\right) = 1 \Rightarrow 16y^2\left(1 - y^2\right)\left(4y^4 - 4y^2 + 1\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(16y^2 - 16y^4\right)\left(4y^4 - 4y^2 + 1\right) = 1.$$

Пусть $2y^2 = t,\ t \ge 0$, тогда $t^2 = 4y^2$. Имеем

$$(8t-4t^2)(t^2-2t+1)=1 \Leftrightarrow -4t^4+16t^3-20t^2+8t-1=0 \Leftrightarrow 4t^4-16t^3=-20t^2+8t-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2t^2)^2-2\cdot 2t^2\cdot 4t+16t^2=16t^2-20t^2+8t-1 \Leftrightarrow (2t^2-4t)^2=-4t^2+8t-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2t^2-4t)^2+(2t^2-4t)z+\frac{z^2}{4}=\frac{z^2}{4}+(2t^2-4t)z-4t^2+8t-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2t^2-4t+\frac{z}{2}\right)^2=t^2(-4+2z)+t(8-4z)+\left(\frac{z^2}{4}-1\right).$$

Подберем z так, чтобы многочлен, стоящий в правой части равенства, стал полным квадратом. Для этого он должен иметь один двукратный корень, то есть

$$\frac{D}{4}=(4-2z)^2+(4-2z)\left(\frac{z^2}{4}-1\right)=-\frac{z^3}{2}+5z^2-14z+12=0.$$

Подбором находим, что $z_0=2$ является корнем уравнения

$$-\frac{z^3}{2}+5z^2-14z+12=0.$$

Подставим $z_0=2$ в уравнение $\left(2t^2-4t+\frac{z}{2}\right)^2=t^2(-4+2z)+t(8-4z)+\left(\frac{z^2}{4}-1\right)$, после чего оно примет вид

$$(2t^2-4t+1)^2=0 \Leftrightarrow 2t^2-4t+1=0 \Leftrightarrow t_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}.$$

Перейдем к переменной y

$$y_1=\sqrt{\frac{t_1}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$y_2=-\sqrt{\frac{t_1}{2}}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$y_3=\sqrt{\frac{t_2}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$y_4=-\sqrt{\frac{t_2}{2}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Подставив получившиеся значения переменной y во второе уравнение системы, найдем соответствующие значения переменной x

$$x_1 = \frac{1}{4y_1\left(2y_1^2 - 1\right)} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{4y_2\left(2y_2^2 - 1\right)} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$x_3 = \frac{1}{4y_3\left(2y_3^2 - 1\right)} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$x_4 = \frac{1}{4y_4\left(2y_4^2 - 1\right)} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$.

3) Доказательство неравенств.

Как правило, навыки решения и доказательства неравенств, за исключением квадратичных, формируются на более низком уровне, чем уравнений. Эта особенность имеет объективную природу: теория неравенств сложнее теории уравнений. Тем не менее, многие приемы и методы решения неравенств совпадают с приемами и методами решения уравнений. В том числе, к доказательству неравенств применим метод замены переменной. При этом замена переменных, входящих в неравенство, с одной стороны, сокращает число переменных, а с другой, позволяет привести неравенство к виду, более удобному для исследования его свойств.

Пример. Доказать, что $(a+b)^4 \le 8\left(a^4 + b^4\right)$.

При $a = b = 0$ неравенство верное.

Решение с помощью тригонометрической подстановки

Для любых $a, b \ne 0$ найдется угол α, что $b = a\,tg\alpha,\quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Исходное неравенство примет вид

$$a^4(1+tg\alpha)^4 \le 8a^4(1+tg^4\alpha) \Leftrightarrow \left(\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^4 \le 8\left(\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}\right).$$

Так как $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos^4\alpha \ne 0$. Умножим обе части неравенства на $\cos^4\alpha$, получим

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^4 \le 8(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha) \le (\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha) \Leftrightarrow$$

$$(1+\sin 2\alpha)^2 \le 8\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right) \Leftrightarrow 1+2\sin 2\alpha+\sin^2 2\alpha \le 8-4\sin^2 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\sin^2 2\alpha+7\sin 2\alpha-5\sin 2\alpha-7 \le 0 \Leftrightarrow (\sin 2\alpha-1)(5\sin 2\alpha+7) \le 0.$$

Второй множитель всегда положительный, а первый не превосходит 0, поэтому все произведение не положительно.

Алгебраическое решение

Выполним решение с помощью тождественных преобразований. Для этого рассмотрим разность

$$8(a^4+b^4)-(a+b)^4 = 8a^4+8b^4-(a^2-2ab+b^2)^2 =$$

$$= 8a^4+8b^4-a^4-4a^2b^2-b^4-4a^3b-2a^2b^2-4ab^3 =$$

$$= 7a^4+7b^4-6a^2b^2-4a^3b-4ab^3 = 3(a^4+b^4-2a^2b^2)+4(a^4+b^4+a^3b-ab^3) =$$

$$= 3(a^2-b^2)^2+4(a^3(a-b)-b^3(a-b)) = 3(a^2-b^2)^2+4(a-b)(a^3-b^3) =$$

$$= 3(a^2-b^2)^2+4(a-b)^2(a^2+ab+b^2) \ge 0.$$

Оба решения по простоте реализации не уступают друг другу. Решение с помощью тригонометрической подстановки может быть дано как один из возможных способов решения.