

# Изучаем функции: пропедевтика на уроках математики

**О. А. Зайцева,**

учитель математики первой категории

гимназии г. Белоозёрска

Понятие функции является одним из фундаментальных на уроках не только математики, но и других смежных дисциплин, таких как физика, химия, география. Функциональная линия занимает ведущее место в процессе изучения алгебры, поэтому имеет огромную ценность для школьного курса математики. Многие известные математики и педагоги утверждали, что понятие функции должно стать не только одним из важных понятий школьного курса, но и тем стержнем, проходящим от элементарной математики до высших разделов алгебры и геометрии, вокруг которого группируется все математическое представление.

В связи с таким большим значением понятия функции в школьном курсе математике встает проблема правильного формирования этого понятия у учащихся 8 класса. Таким образом, пропедевтика функциональной линии в пятых и шестых классах выходит на первый план. Методических рекомендаций к учебникам математики 5–6 класса, в которых выделяется это направление, на данный момент нет, поэтому работа по созданию данных рекомендаций весьма актуальна. Это способствует развитию интеллектуальных умений и творческих способностей учащихся; развитию различных форм мыслительной деятельности, а также усиливает подготовку по теме.

## **Понятие функции в математике и в школе**

### **□ Понятие функции. Способы задания функции**

Понятие функции является одним из самых важных в математике, начиная еще с семнадцатого века. В начало этого понятия легло отношение

между величинами и зависимость между величинами в Древней Греции. В 16-17 веках ученые создают геометрическую интерпретацию уравнений и зависимость уравнений от декартовой системы координат. Все это способствовало выделению функциональной зависимости геометрической интерпретации. В средние века по большей части в Индии развивается аппарат работы с уравнениями – это сильно повлияет на аналитическую запись функции в дальнейшем. Все эти моменты подготовили базу для того, чтобы в 18-19 веках удалось выделить составляющие и основные понятия функций.

Завершающим этапом формирования представлений о всех компонентах понятия функции и их взаимосвязи и ролью играемой в математике является введение понятия самой функции. Этот процесс нашел отражение в трех основных линиях:

- ✓ развертывания системы понятий, упорядочения всех представлений о функции, характерных для функциональной линии;
- ✓ углубленное изучение отдельных частных функций и их классов;
- ✓ расширение области использования алгебры за счет введения в нее функций и развернутых действий над ними.

Для того чтобы представить все многообразие представлений понятия функции сравним два подхода в его трактовке – генетический и логический.

Генетическая трактовка основана на разработке основных черт входивших в понятие функции до 19 века. Основными понятиями при рассмотренной трактовке является переменная величина и функциональная зависимость переменных.

Данная трактовка имеет множество достоинств. Динамический характер понятия функции подчеркивает функциональную зависимость, в которой хорошо просматривается модельный аспект при изучении, многих важных явлений природы. Из этого видно, как хорошо увязывает с табличным и аналитическим представлением большинства функций.

Генетическая трактовка включает в себя ограничительные черты понятий функций. Этими ограничениями является даже то, что переменные все-

гда пробегает непрерывный числовой ряд значений. Только при такой трактовке происходит сужение объема понятия функции из-за того, что понятие связано только с числовыми функциями одного аргумента. [14, с.234]

Вторая рассматриваемая трактовка – логическая. Она основана на двух направлениях. Первая это вывод понятия функции из понятия отношений, а второе заключается в том, что функция выступает в виде отношения специального вида между двумя множествами.

Логическая трактовка понятия функции охватывает множества разной природы. Преимущество данной трактовки заключается в том, что она очень проста по своей структуре. Это позволяет точно дать определения, которые относятся к функциональной линии, например представление обратной функция и многих других.

Приходим к выводу, логическая трактовка функции является с определенной стороны избыточной, в то время как генетический подход является недостаточным для обобщения понятия функции. Хочется подчеркнуть, что такое различие в трактовках проявляется с наибольшей резкостью при введении самого понятия. При последующем изучении функциональной линии различия постепенно стираются. В школьном курсе математики понятия функции вводится при помощи генетического подхода.

Кроме различия в трактовках понятия, существует **три способа** задания функции в школьном курсе математики. Перечислим их:

- ✓ аналитический;
- ✓ табличный;
- ✓ графический.

Рассмотрим разные способы задания функции на примере задач, рассматриваемые на уроках математики, на разных этапах введения понятий функции.

#### 1. Аналитический способ задания функции.

Данный способ является универсальный. Он заключается в том, что функция задается при помощи использования формул, то есть используя

буквенные выражения, то с чего начинается введения в понятий в курсе изучения математики в пятом классе.

Приведем примеры аналитического задания функции.

1)  $y = 3x$ ,

2)  $y = x^2$ ,

3)  $y = \frac{1}{x}$ .

Аналитический способ достаточно привычен и не создает проблем в формировании понятия функции.

## 2. Табличный способ задания функции.

Суть табличного метода кроется в его названии. Этот способ представления функции при помощи обычной таблицы

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	9	4	1	0	1	4	9

Таблица 1.1 Табличный способ задания функции  $y = x^2$ .

В этой таблице каждому иксу соответствует какое-то значение игрека. В первой строчке - значения аргумента. Во второй строчке - соответствующие им значения функции.

К данному способу учащиеся привыкают уже с младших классов. В 5 и 6 классах очень часто встречается задачи, основанные на построении таблиц для функций.

## 3. Графический способ задания функции.

В данном способе функция представлена графиком. По оси абсцисс откладывается аргумент (x), а по оси ординат - значение функции (y). По графику тоже можно выбрать любой x и найти соответствующее ему значение y.

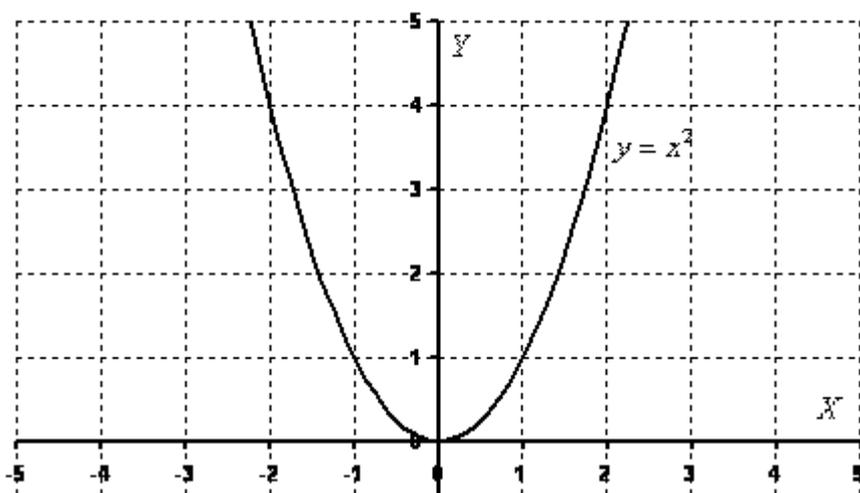


Рисунок 1.1 Графический способ задания функции  $y = x^2$ .

Данный способ задания более простых функций встречается уже в 6 классе.

Понятие функции используется во многих дисциплинах школьного курса, но полноценное введение данного понятия происходит только в 8 классе на уроках алгебры. Поэтому важно проводить пропедевтическую работу уже в 5 и 6 классе, для полноценного восприятия данного понятия во всех направлениях школьного курса.

#### □ Пропедевтика на уроках математики в 5-6 классах

Пропедевтика (от греч. προαίδεο – предварительно обучаю), введение в какую-либо науку, предварительный вводный курс, систематически изложенный в сжатой и элементарной форме. [4, с. 722]

В дидактике под пропедевтикой вообще понимают подготовительный курс, представляющий введение в какую-либо науку или учебный предмет и отличающийся элементарной формой изложения.

Необходимость в пропедевтике возникает тогда, когда существуют определенные трудности в изложении конкретных тем. Например, компактное изложение материала или недостаточном количестве времени уделяемого в рабочей программе изучаемому курсу. Это можно сделать за счет распределения материала в других основных курсах.

Понятно, что пропедевтические работы в школьном курсе математики возможны только за счет стойкой логической связью между высшей математикой и элементарной, изучаемой с начальных классов.

Логическая цельность курса математики проходимого в школе является проблемой имеющую долгую историю. К началу 20 века в школьном курсе сложилась международная традиционная система математического образования, которая отличалось разделением элементарной математики на четыре учебных предмета: арифметику, алгебру, геометрию, тригонометрию. Эти предметы успешно существуют отдельно друг от друга. Многие математики во всем мире выступают с критикой к такому подходу и предлагают провести реформу в математическом образовании. В 1897 году в Цюрихе на I Международном конгрессе математиков выступил с докладом известный геометр, педагог высшей немецкой школы Феликс Клейн, в котором содержалась мысль о том, что в математике средней школы «функциональная идея» должна быть центральной: «Руководящую роль в школьном курсе математики должно играть понятие функции. Оно должно быть усвоено очень рано и должно пронизывать все преподавание алгебры и геометрии»[14, с.210]

Понятие функциональной зависимости является одним из ведущих в математической науке, поэтому правильное формирование этого понятия у учащихся представляет важную задачу в целенаправленной деятельности учителя по развитию математического мышления и творческой активности детей. Развитие функционального мышления предполагает, прежде всего, развитие способности к обнаружению новых связей, овладению общими учебными приемами и умениями.

Подготовка учащихся к осознанному восприятию идеи функциональной зависимости и всеми основными понятиями функции заключается в постепенном знакомстве с этими понятиями, начиная уже с 5 класса. Функциональная пропедевтика способствует воспитанию интеллектуальных качеств учеников, а также правильному формированию мыслительных операций. Это направление работы выражается в задачах и упражнениях. Для подго-

товки используют различные обобщающие упражнения, которые направлены на обретение и накопления опыта у учеников младших классов. В результате накопления этого опыта, у учащихся 5 и 6 классов появляются необходимые представления для образования понятий функций на числовой и графической основе. Эти упражнения должны помочь учащимся не запутаться в специальной далекой от обобщения терминологии, а выработать понимание то, что одно и то же выражение может принимать разные значения и все это зависит только от переменных и буквенных выражений. Все эти действия направлены на помощь ученикам в восприятии разного представления функциональной зависимости.

Тесная связь между математикой и другими дисциплинами, такими как физика, химия и другие является причиной отдельного повышенного внимания к числовым функциям.

Проблема в восприятии понятия функции заключается в том, что ученикам очень трудно отказать от привычки воспринимать в математике только постоянные величины, с которых начинается введение все основных понятий.

Для решения этой проблемы и необходима функциональная пропедевтика. Она помогает обеспечить более легкий переход к переменным величинам. Все возможности для использования функциональной пропедевтики есть у учителя, только он должен правильно использовать предложенные методы в школьном обучении. Опосредованная пропедевтика предлагает постепенную подготовку к введению понятия функции, при которой не используется ни специальная символика, ни терминология. Можно предлагать учащимся задания, которые постепенно формируют понятие переменных величин, отношение между собой математических величин.

Приведем примеры различных видов функциональных задач и упражнений, которые могут иметь пропедевтическое направление среди школьной программы 5 и 6 классов.

1) Любые упражнения на различные преобразования буквенных выражений, а также вычисление их значения при различных значения переменных. Дополнительно можно организовать запись значений в виде таблицы. Это подготовит учащихся к введению табличного метода задания функции. А само задание буквенного выражения приводит к подготовке введения понятия функции в аналитической форме.

2) Текстовые задачи на составление формул и перевод от готовых формул к решению задач.

3) Задачи на изменения действий при изменении значения его компонентов. К примеру, что произойдет с произведением, если один множитель умножить в 4 раза.

4) Задачи с использованием координатной прямой и плоскости, упражнение в чтении графиков. В 5 классе ученикам предлагается научиться решать задачи по изображению точек на координатном луче и искать координату на луче. В шестом классе предлагаются те же задачи, только переносим место действия из плоскости в пространство.

Давайте рассмотрим более подробно представление функциональной пропедевтики в действующей школьной программе изучения математике и предложенных для использования учебниках 5 и 6 классов авторов Дорофеева Г.В. и Петерсона Л.Г., Виленкина Я.Н., Зубарева И.И. и Мордкович А.Г. Кузнецова Е.П..

Подготовка учащихся к введению понятия функции.

#### **□ Анализ рабочей программы по математике 5-7 классов**

Функциональная линия - это одна из ведущих линий в школьной математике, как в курсе алгебры, так и в геометрии. Знакомство учащихся с основными определениями необходимыми для усвоения данного понятия начинается еще в 5 классе и прослеживается вплоть до полноценного введения в 8 классе, а заканчивается только 11 классе.

Проведем анализ рабочей программы по математике.

Всего за весь курс по теме «Функции» отводится 65 часов.

По моему мнению, предложенное учителям количество часов очень мало для изучения понятия, которое используется не только в различных смежных темах математики, но так активно применяется в смежных дисциплинах.

В 5 классе изучение функций сводится к пропедевтическим упражнениям в темах «Буквенные выражения», «Координатный луч», «Дроби».

В данных темах вводят понятия: зависимости между величинами; представление зависимостей формулами.

В 6 классе вводятся понятия «координатная плоскость», «прямой и обратной пропорциональности». Подготовка к изучению темы «функция» также может проходить в пропедевтических задачах.

В 7 классе на изучение линейной функции отводится 11 часов. В рамках, которых изучаются:

Координатная плоскость. Алгоритм отыскания координат точки. Алгоритм построения точки  $M(a; b)$  в прямоугольной системе координат.

Линейное уравнение с двумя переменными. Решение уравнения  $ax + by + c = 0$ . График уравнения. Алгоритм построения графика уравнения  $ax + by + c = 0$ .

Линейная функция. Независимая переменная (аргумент). Зависимая переменная. График линейной функции. Наибольшее и наименьшее значения линейной функции на заданном промежутке. Возрастание и убывание линейной функции.

Линейная функция  $y = kx$  и ее график.

Взаимное расположение графиков линейных функций

В 8 классе по 18 академических часов отводится на изучение функцию  $y = \sqrt{x}$ . и квадратичной функции.

В 9 классе 25 часов изучают числовые функции в целом.

После изучения функциональной линии в основной школе учащиеся должны:

- ✓ вычислять значения функций, заданных формулами (при необходимости использовать калькулятор);
- ✓ составлять таблицы значений функций.
- ✓ строить по точкам графики функций.
- ✓ описывать свойства функции на основе ее графического представления.
- ✓ овладение умением определять по формуле взаимное расположение графиков линейных функций.
- ✓ моделировать реальные зависимости формулами и графиками.
- ✓ читать графики реальных зависимостей.
- ✓ использовать функциональную символику для записи разнообразных фактов, связанных с рассматриваемыми функциями, обогащая опыт выполнения знаково-символических действий.
- ✓ строить речевые конструкции с использованием функциональной терминологии.
- ✓ использовать компьютерные программы для построения графиков функций, для исследования положения на координатной плоскости графиков функций в зависимости от значений коэффициентов, входящих в формулу.
- ✓ распознавать виды изучаемых функций.
- ✓ показывать схематически положение на координатной плоскости графиков функций.[18, с. 10]

Проведем анализ реализации функциональной пропедевтики в различных учебниках по математике в 5 и 6 классах.

#### □ **Функциональная пропедевтика на уроках математики в 5 классе**

Проведя анализ нескольких учебников по математике определяем, что в 5 классе приводится ряд упражнений, в которых учащиеся имеют дело с переменными величинами в скрытой форме. К таким упражнениям относятся изменение суммы, разности, произведения и частного дроби.

Например, задача приведенная в учебнике по математике Л. Г. Петерсона и Г. В Дорффеева.

Задача 1. Запиши число :

- а) на 3 больше, чем разность чисел  $a$  и  $b$
- б) на 7 меньше, чем произведение чисел  $a$  и  $b$
- в) в 5 раз больше, чем частное чисел  $a$  и  $b$
- г) в 4 раза меньше, чем сумма чисел  $a$  и  $b$  [7, с.7]

Упражнения такого рода дадут ученикам 5 класса некоторое представление о переменных величинах. Полезно при записи решения подобных упражнений использовать таблицы. Они наглядны и в то же время это табличная запись функциональной зависимости.

Задача 2. Как изменится разность, если:

- 1) уменьшаемое увеличить на 10;
- 2) вычитаемое уменьшить на 5;
- 3) уменьшаемое увеличить на 20, а вычитаемое уменьшить на 3? [2,с.77]

После устного ответа учеников им можно показать процесс изменения суммы, когда один из компонентов остается неизменным, а другой меняется, с помощью таблицы. Таблице можно придать следующий вид:

Уменьшаемое	+10		+20
Вычитаемое		-5	-3
Разность	+10	-5	+17

Таблица 2.1 Табличное решение задачи 2

Рассматривая эту таблицу, легко установить зависимость результата от величин уменьшаемого и вычитаемого и характер изменения разность.

Аналогичные упражнения дают и на изменение суммы, произведения, частного. Термины учащимся не сообщают, но обращают их внимание на то, что в задаче величины принимают различные значения.

При повторении геометрического материала есть возможность углубить понятие о переменной величине. Например, площадь прямоугольника при выбранной длине основания будет меняться в зависимости от высоты

прямоугольника. Площадь прямоугольника при длине основания, равна 4 единицам, и меняющейся высоте будет выражаться:  $S=4x$ .

Такая же работа может быть проведена при решении задач следующего типа.

Задача 3. Первое число равно  $n$ , второе на 5, а третье в 2 раза больше первого. Составьте выражение для определения суммы этих чисел и найдите его значение при  $n$ , равном:

- 1) 9;
- 2) 16;
- 3) 39;
- 4) 51.[5, с.89]

При решении текстовых задач пятиклассники используют различные функциональные зависимости. Самые распространённые:

- путь, скорость и время;
- стоимость, цена и вес;
- стороны и периметр квадрата, прямоугольника;
- стороны и площадь прямоугольника;
- работа, оплата и время работы и т. д.

Знание этих зависимостей – залог успешного решения задач на составление уравнений и последующего изучения функциональной зависимости в алгебре.

Задачи по математике можно задать так, что некоторые величины предстанут как переменные.

Задача 4.

Бегун пробегает за час 8 км. Сколько он пробежит за 1 час; 1,5 часа; 2 часа; 2,5 часа; 3 часа?

При решении учащиеся устанавливают зависимость между величинами: путь равен скорости, умноженной на время движения.

Скорость (км/ч)	8	8	8	8	8
Время (ч)	1	1,5	2	2,5	3
Расстояние (км)	8	12	16	20	24

Таблица 2.2 Табличное решение задачи 4

В отношении функциональной пропедевтики здесь существенно следующее:

- 1) установлена зависимость между величинами;
- 2) сделана табличная запись зависимости;
- 3) в таблице время и путь выступают как переменные величины, а скорость – постоянная.

Выполнение таких упражнений и повторение время от времени разных функциональных зависимостей приучают учеников 5 класса к тому, что есть величины, которые могут менять своё значение, причём в зависимости от изменения одной величины другая величина принимает определённое значение.

Кроме того, учеников надо готовить к графикам.

Задача 5. Цена пшеницы 10 коп. за кг. Сколько стоит 1 кг; 1,5 кг; 2 кг; 2,5 кг; 3 кг; 4 кг; 5 кг; 6 кг; 7 кг; 8 кг; 9 кг; 10 кг?

Составить таблицу и показать зависимость на графике.

Решение будет в виде таблицы.

Цена (к/кг)	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Вес (кг)	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7	8	9	10
Стоимость (к)	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90	100

Таблица 2.3 Табличное решение задачи 5

Отложим на числовом луче полученные значения веса сверху и стоимости снизу.

Затем ученикам показывают, как, пользуясь полученным графиком, можно сразу находить по данному весу стоимость и наоборот.

Такие графики-номограммы можно приготовить для различных задач по схеме путь = скорость  $\times$  время, скорость = путь / время и т. д.

Можно предложить задачи и на обратную пропорциональность. Например, число  $m$  = стоимость покупки / цена  $m$ .

Такие упражнения, давая понятие переменной величины и функциональной зависимости, однако не готовят учеников к графикам, выполненным на координатной плоскости. Для такой подготовки полезно вычерчивать столбчатые диаграммы. Учащиеся должны их выполнять на миллиметровке или на бумаге в клетку.

Тематика для таких диаграмм в 5 классе может быть различной: сопоставление данных семилетнего плана, сравнение урожайности, высоты гор, длины рек, численности населения, тоннаж торговых судов, потолок различных самолётов и т. д.

Задача 6. Медиками установлено, что для нормального развития ребенок или подросток, которому  $T$  лет, ( $T < 18$ ) должен спать  $t$  часов в сутки, где  $t = 17 - T/2$ . Сколько времени должен спать ребенок в сутки в возрасте 1 год, 2 лет, 4 лет, 7 лет? Заполните таблицу

T	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
t											

Таблица 2.4 Табличное решение задачи 6

Б) построить линейную диаграмму, показывающую изменение положительности сна с 8 до 18 лет. [2,с.89]

Диаграммы в виде вертикальных столбиков или отрезков прямой особенно следует рекомендовать, так как от них проще всего перейти к координатной системе, столбик или отрезок – ордината. Ученики к ним и потом, когда на чертеже будет отмечен только конец столбика – ординаты, они будут знать, что отрезок подразумевается.

Подобные диаграммы можно делать как в 5, так и в 6 классе. Материал для них можно взять из географических атласов, сводок о выполнении годового плана и т.д.

#### □ **Функциональная пропедевтика на уроках математики в 6 классе**

В 6 классе функциональная пропедевтика расширяется. Учащиеся начинают рассматривать прямую и обратную пропорциональность, рассматривают табличные записи этой зависимости, формулы  $y=k*x$ ,  $y=k/x$ ; вводят буквенные обозначения, где под буквой обозначает переменную величину.

В учебнике « Математика 6 класс» под редакцией Кузнецов вводится через определения:

Две величины  $x$  и  $y$  прямо пропорциональны, когда они связаны формулой  $y = kx, k \neq 0$ . Эту формулу называют формулой прямой пропорциональности, а число  $k$  – коэффициентом прямой пропорциональности [11,с.231]

Две величины  $x$  и  $y$  обратно пропорциональны, когда они связаны формулой  $y = \frac{k}{x}, k \neq 0$ . Эту формулу называют обратной пропорциональности, а число  $k$  – коэффициентом обратной пропорциональности. [11,с.233]

После данных определений вводится первое представление о графиках функций  $y = \frac{k}{x}, k \neq 0$  и  $y = kx, k \neq 0$ , а также закрепляется рядом задач:

Изобразите график прямой пропорциональности и назовите пять таких его точек, координаты которых являются целыми числами  $y = -\frac{3}{4}x$ .

Найдите  $k$ , если график прямой пропорциональности  $y = kx$  проходит через точку  $B(-5; 1)$ .

После того как ученики ознакомятся с построением элементарных графиков, им можно показать их построение для случая, когда берется вся координатная плоскость.

Рекомендуется предлагать своим учащимся задания, в которых они будут искать значение выражений не при одном значении, а сразу несколько

различных значений, чтобы показать зависимость значения выражения от значений входящих в него букв.

Задача 1.

Вес детали 12 г, площадь её основания  $s$  дм<sup>2</sup>. её поставили на горизонтальную опорную плоскость. Выразите давление детали на 1 см<sup>2</sup> опоры. Составьте таблицу значений давления для  $s=1, s=2, s=3, s=4, s=5, s=6, s=7, s=8$ .

Решение: Давление на 1 дм<sup>2</sup> равно  $12/s$  (г/ дм<sup>2</sup>).

S	1	2	3	4	5	6	7	8
12/ s	12	6	4	3	2,4	2	1,72	1,5

Таблица 2.5 Табличное решение задачи 1

В заключение предложите учащимся сделать столбчатую диаграмму.

Задание 2. Дано выражение  $\frac{x^2+3x}{x+5}$ .

Найти его значение при  $x=0, x=1, x=2, x=3, x=4, x=5$ . Результат записать в виде таблицы и сделать столбчатую диаграмму.

x	0	1	2	3	4	5
$\frac{x^2 + 3x}{x + 5}$	0	$\frac{2}{3}$	$1\frac{3}{7}$	$2\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{9}$	$3\frac{3}{10}$

Таблица 2.6 Табличное решение задачи 2

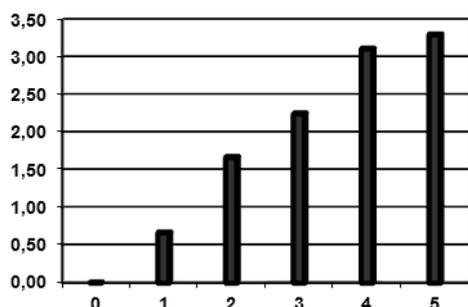


Рисунок 2.1 Решение задачи 2 в виде диаграммы

Обязательно подчеркните, что значение выражения  $\frac{x^2+3x}{x+5}$  зависит от значений  $x$ .

Подобные задачи целесообразно давать в 6 классе и даже включать в них небольшой элемент исследования.

Задача 3: Выполнить действие:  $-\frac{10x^3}{-5x}$  и найти значение частного при  $x=0; -5; -1; -0,1; 3,5$ . Что можно сказать о знаке частного?

Решение:  $-\frac{10x^3}{-5x} = 2x^2$

X	-5	-3	-1	0	1	3	5
$-\frac{10x^3}{-5x}$	50	18	2	Не имеет смысла	2	18	50

Таблица 2.7 Табличное решение задачи 3

Сделаем вывод, что частное в данном случае может принимать только положительные значения, а не может принимать отрицательных значений и быть нулём.

При решении задач на тождественные преобразования учитель может ставить перед своими учениками аналогичные вопросы.

Полезно составлять формулы. Хороший материал для этого имеется в курсе 6 класса. Можно предложить такие упражнения.

Острые углы прямоугольного треугольника равны  $\alpha$  и  $\beta$ . Найти зависимость между ними. ( $\alpha + \beta = 90^\circ$ ).

Периметр равнобедренного треугольника равен  $P$ , боковая сторона  $a$ , основание  $b$ . Составить формулу, по которой находят:

- а)  $P$  по данным  $a$  и  $b$ ;
- б)  $b$  по данным  $a$  и  $P$ ;
- в)  $a$  по данным  $P$  и  $b$ .

Угол при вершине равнобедренного треугольника равен  $\beta$ , а при основании  $\alpha$ . Составить формулу, по которой находят:

- а)  $\beta$  по данному  $\alpha$  ;
- б)  $\alpha$  по данному  $\beta$ .

4. Пусть в треугольнике сторона равна  $a$ , соответствующая ей средняя линия равна  $d$ . Составить формулу, по которой находят:

а)  $d$ , зная  $a$ ;

б)  $a$ , зная  $d$ .

Составить таблицу значений  $d$ , если  $a=1; 1,8; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 7; 8$ , и построить график зависимости  $d$  от  $a$ .

Можно предложить упражнения, в которых ставится вопрос о значениях независимой переменной, при которых две функции равны, а также упражнения, содержащие вопрос о корнях функций.

Задача 4. При каких значениях  $y$  следующие выражения равны между собой:

$y-5$  и  $3$ ;

$3y-1$  и  $8$ ;

$\frac{3y-5}{5}$  и  $4$ ;

$\frac{8y}{3} - 5$  и  $10$ ;

$\frac{15y-40}{3}$  и  $-5$ .

Задача 5: При каких значениях  $y$  следующие выражения равны нулю:

$2y$ ;

$4y-8$ ;

$\frac{3y-2}{4}$ ;

$\frac{y-8}{5}$ ;

При изучении рациональных чисел также можно дать интересные упражнения.

Задача 6: Учащийся 6 «Б» получил задание по географии - наблюдать за температурой раз в день (в 12 ч) на протяжении 9 дней. Учащийся представил изменение температуры на следующем графике.

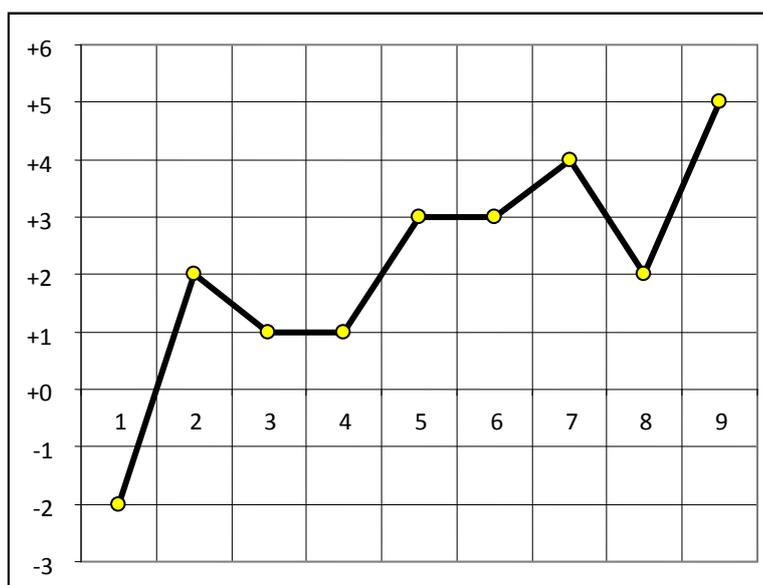


Рисунок 2.2 Условие задачи 6

Запишите, насколько изменялась температура ежедневно, сложите полученные числа и сравните полученную сумму с изменением температуры за 9 дней по чертежу учащегося 6 «Б».

Цель таких упражнений, не вводя новых терминов, формировать понятие переменной величины и функциональной зависимости с помощью упражнений.

Для подготовки введения понятия области определения можно предложить учащимся после действий над алгебраическими дробями определить значения переменной, в которых выражение не имеет смысла. Например, изучая дробь  $\frac{1}{1-a}$ ; целесообразно найти значение полученного результата при значениях переменной  $a = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 5; 6$ . Полученные данные представить в таблице:

A	-2	-1	0	1	2	3	5,6
$\frac{1}{a-1}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	Не имеет смысла	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{23}$

Таблица 2.8 Табличные значения функции  $\frac{1}{1-a}$

В изучении новых тем в 6 классе следует помнить, что необходимо соблюдать меру и в первую очередь давать учащимся основной материал. Представление о переменных и функциональной зависимости формировать попутно в задачах повышенной сложности и факультативах.

По результатам анализа учебников по математике за 6 класс Г. В. Дорофеева и Л. Г. Петерсона, Я. Н. Виленкина, Е. П. Кузнецова приходим к выводу, что учащиеся имеется полный арсенал необходимых определений и понятий для введения нового понятия « функция», «линейная функция», «область определения», которые вводятся в 7 классе в рамках темы «Линейные уравнения». Учащиеся уже имеют представление о прямой и обратной пропорциональности, графиков функции, начальное представление об области определения и т.д., хоть обобщения материала по данной тематике как такового нет.

Задачи представление в учебниках по математике 5 и 6 классов Г. В. Дорофеева и Л. Г. Петерсона имеют не только пропедевтическое назначение, но прикладное применение в смежных дисциплинах – физика, химия, география. Например:

Задача №7. Расстояние  $h$ , которое проходит в вакууме падающее вниз тела, не зависит от его массы, а зависит лишь от времени падения  $t$ . Приближение значения величины  $h$  м в первые пять минут падения приведены в таблице. Построй формулу и график этой зависимости, подобрав на осях координат удобные единицы измерения.

t, с	0	1	2	3	4	5
h,	0	5	20	45	80	125

Таблица 2.8 Табличное задание задачи 7

Результатом проделанного анализа стало разработка дополнительного занятия – факультатива по теме «Понятия функция», которое представлено в приложении Б.

Приходим к выводам, что для того, чтобы провести учеников к сознательному усвоению основных понятий функций в седьмом и восьмом клас-

сах, необходимо регулярно проводить в младших классах постепенную подготовку к формированию данного понятия.

В процессе пропедевтической подготовки могут использоваться всевозможные упражнения, которые не ведут к прямому введению изучаемого понятия, но делают доступным учащимся младших классов представления, ведущие к образованию соответствующих понятий на конкретной числовой и графической основе. Хотя данные упражнения далеки от введения специальной терминологии, эти упражнения должны научить учеников выяснять, что рассматриваемое ими одно и то же выражение может приобретать различные значения в зависимости от числовых значений входящих в него букв. Эти упражнения учат учеников понять различные способы выражения функциональных зависимостей.

Проведенный анализ учебной литературы для 5-6 класса показывает нам, что во всех учебниках прослеживается пропедевтика функциональной зависимости через ряд различных задач и упражнений. Результатом такой пропедевтики является высокая умственная активность младших школьников, развитие интеллектуальных, общепредметных и специфических математических умений и навыков, что способствует созданию прочной базы введения и изучения функций в средней школе. Задачи представление в учебниках по математике 5 и 6 классов Г. В. Дорофеева и Л. Г. Петерсена имеют не только пропедевтическое назначение, но прикладное применение в смежных дисциплинах – физика, химия, география.

Предлагаем вашему вниманию разработку урока 7 класса по теме «Линейная функция» (Приложение 1), которая опирается на понятия, которые вводились в 5 и 6 классах, а также разработка факультативного занятия направленного на правильное восприятия понятии функции (Приложение 2).

## Литература

1. **Алимов, Ш. А.** Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров [и др] – 16-е изд., доп. – М. : Просвещение, 2009 – 212с.
2. **Виленкин, Н. Я.** Математика, 5 класс: учеб. для общеобразоватых учреждений / Н. Я. Виленкин и др.–24-е изд., испр, – М. : Мнемозина. 2008 – 280 с.
3. Виленкин, Н. Я. Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин [и др.]. – 25-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2009. – 288 с.
4. **Гардарики, М.** Философия: Энциклопедический словарь / М. Гардарики; под редакцией А.А. Ивина – М. :Просвещение,2004. – 1072 с.
5. **Дорофеев, Г. В.** Математика 5 класс. Учебник в 2 ч. Ч.1 / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон – 2-е изд., перераб. – М. : 2011 – 176с.
6. **Дорофеев, Г. В.** Математика 5 класс. Учебник в 2 ч. Ч.2 / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон . – 2-е изд., перераб. – М. : 2011 – 160с.
7. **Дорофеев, Г. В..** Математика. 6 класс. Учебник в 3 ч. Ч.1/ Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон – 2-е изд., перераб. – М.: 2010– 112с.
8. **Дорофеев, Г. В.** Математика. 6 класс. Учебник в 3 ч. Ч.2/ Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон – 2-е изд., перераб. – М.: 2010 – 128с.
9. **Дорофеев, Г. В.** Математика. 6 класс. Учебник в 3 ч. Ч.3/ Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон – 2-е изд., перераб. – М.: 2010 – 178с.
10. **Зубарев, И. И.** Математика. 5 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. – 9-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2009. – 270 с.
11. **Кузнецова, Е. П.** Математика: учеб. пособие для 6 кл. общеобразоват. учреждений с рус. яз. обучения / Е. П. Кузнецова и др.; под ред. Л. Б. Шнепермана. – Минск : Нац. ин-т образования, 2010. – 320 с.

12. **Кузнецова, Е. П.** Алгебра: учеб. пособие для 7-го кл. общеобразоват. учреждений с рус. яз. обучения / Е. П. Кузнецова [и др.]; под. ред. П. Б. Шнепермана. – 3-е изд., перераб. – Минск : Нар. асвета, 2009. – 318 с.
13. **Макарычев, Ю. Н.** Алгебра 7 класс с углубленным изучением математики / Ю. Н. Макарычев – М. : Мнемозина, 2004. – 223с.
14. **Марушенко, Л. Ю.** К проблеме изучения понятия функции в школьном курсе математики [Текст] / Л. Ю. Марушенко // Актуальные вопросы методики преподавания математики и информатики в свете модернизации Российского образования: сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции, 17 апреля 2011 г. – Биробиджан: Изд-во ДВГС-ГА, 2011. – 263 с.
15. **Мордкович, А.Г.** Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – М. : Мнемозина, 2009. – 191 с.
16. **Мордкович, А.Г.** Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – М. : Мнемозина, 2009. – 186 с.
17. **Саранцев, Г. И.** Методика обучения математике в средней школе / Г. И. Саранцев – М. : Просвещение, 2002. – 130с.
18. **Учебная программа для общеобразовательных учреждений с русским языком обучения. Математика V-XI классы / Утверждено Министерством образования – Минск : Национальный институт образования, 2009г. – с.56.**

## Урок «Линейная функция»

### Цели:

#### Образовательные:

- Ввести определения понятия «линейной функции»;
- Научиться составлять таблицу значений для линейной функции;
- Научиться строить графики линейной функции.

#### Развивающие:

- Формирование опыта самостоятельной деятельности;
- Организовать ситуацию для развития рефлексивных способностей личности;

#### Воспитательные:

- Формирование приёма обобщения при введении понятия «функция»;
- Показать связь между математикой и смежными дисциплинами
- Создать условия для воспитания чувства ответственности за выполняемую работу.

### Учебные задачи:

- знать определение понятия «линейная функция»;
- уметь находить значения линейной функции;
- уметь строить графики линейных функций;
- уметь применять новые понятия при решении задач;

**Тип урока:** изучение нового материала.

**Методическое обеспечение:** учебное пособие «Алгебра 7» под редакцией Л.Б. Шнепермана.

## Технологическая карта проекта урока

№	Название этапа и дидактическая задача	Деятельность учителя	Деятельность учеников	Методы, средства и организационные формы	Предполагаемый результат	Время
1	<b>Ориентировочно-мотивационный этап</b> - актуализация опорных знаний (прямо пропорциональность, область определения функции); - постановка учебной задачи.	Учитель предлагает учащимся ответить на следующие вопросы (см. методическое обеспечение урока) Затем учитель формулирует учебную задачу.	Ученики включаются в учебную деятельность.	<i>Метод стимулирования и мотивации учения:</i> проблемный метод. <i>Средства:</i> кабинет для обучения, организационно-координационная деятельность учителя. <i>Организационная форма:</i> коллективная.	Учащиеся быстро включаются в учебную деятельность на уроке. Ученики дали ответы на поставленные вопросы. Учащиеся сформулировали учебную задачу; готовы к активной учебной деятельности на уроке.	5 мин
2	<b>Информационный этап</b> - сообщить необходимую информацию для решения проблемы.	Учитель приступает к объяснению нового материала (см. методическое обеспечение урока).	Учащиеся решают поставленную задачу. Воспринимают, осознают и воспроизводят записи в тетради как инструментальной дальнейшей деятельности по решению задач данной темы.	<i>Метод стимулирования и мотивации учения:</i> Объяснительно-иллюстративный. <i>Средства:</i> кабинет для обучения, раздаточный материал, организационно-координационная деятельность учителя. <i>Организационная форма:</i> коллективная.	Учащиеся восприняли, осмыслили и запомнили новую теорему. Учащиеся готовы к дальнейшей учебной деятельности на уроке.	20 минуты

3	<b>Исполнительский этап</b> - формирование умений применять знания о линейной функции при решении задач; - формирование опыта самостоятельной учебной деятельности;	Учитель: - раздает учащимся задание для самостоятельной работы в классе (см. методическое обеспечение урока); - разъясняет принцип работы с раздаточным материалом, оговаривает временные рамки выполнения задания;	Ученики внимательно выслушивают рекомендации учителя и переходят к самостоятельной учебной деятельности. После окончания выполнения заданий, учащиеся определяют в своем уровне усвоения нового материала.	<i>Метод стимулирования и мотивации учения:</i> репродуктивный <i>Средства:</i> кабинет для обучения, раздаточный материал, организационно-координационная деятельность учителя. <i>Организационная форма:</i> Индивидуальная.	Ученики выполнили предложенное учителем задание. Ученики сформировали определение понятия «линейная функция», определили свой уровень усвоения нового материала.	15 минуты
4	<b>Оценочно-рефлексивный этап</b> - самоанализ достигнутого и самооценка учениками себя действующего на заключительном этапе урока.	Учитель предлагает ученикам рефлекссию свою учебную деятельность на уроке через ответы на вопросы.(см. методическое обеспечение урока)	Учащиеся отвечают на вопросы для самоконтроля себя действующего на данном этапе урока.	<i>Метод стимулирования и мотивации учения:</i> репродуктивный. <i>Организационная форма:</i> индивидуальная. <i>Средства:</i> кабинет для обучения, раздаточный материал.	Все ученики провели самоанализ своей деятельности на уроке, выполнили рефлекссию.	2 минуты
5	<b>Этап постановки домашнего задания</b> - обеспечение понимания содержания и способов выполнения домашнего задания.	Учитель мотивирует учеников на выполнение домашнего задания, дает рекомендации по выполнению предложенных заданий.	Ученики просматривают домашнее задание, при возникновении затруднений задают учителю вопросы.	<i>Метод стимулирования и мотивации учения:</i> Объяснение <i>Средства:</i> кабинет для обучения, раздаточный материал, организационно-координационная деятельность учителя. <i>Организационная форма:</i> коллективная.	Учащиеся сняли возникшие затруднения по домашнему заданию.	3 мин.

## Ход урока

### I. Ориентировочно-мотивационный этап

- 1) Какая функция называется прямой пропорциональностью?
- 2) Что называется областью определения?
- 3) Какой Вы думаете, что произойдет с графиком функции  $y = kx$ , если мы прибавим к значению функции 1 ?

### II. Информационный этап

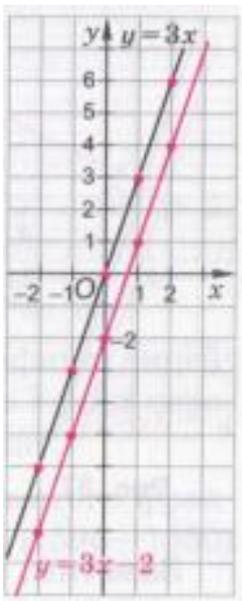
Рассмотрим функцию  $y = 3x - 2$ .

Составим таблицу значений данной функции и сравним ее с таблицей значений  $y = 3x$ .

Заполним

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3x$					
$y = 3x - 2$					

Изобразим полученные функции на координатной плоскости, получим:



Какие выводы мы можем сделать глядя на этот график?

Сформулируем и запишем определение линейной функции.

Определение: Линейной функцией называется функция вида  $y = kx - b$ , где  $k$  и  $b$  – числа; ее область определения состоит из всех чисел.

Сформулируйте самостоятельно, определение, что является графиком функции  $y = kx - b$ .

### III. Исполнительский этап

Задание для самостоятельной работы в классе

Тема: «Линейная функция»		8 класс
Уровни приобретенных умений и навыков	Задания	Ответы
1-ый уровень Узнавание (1-2 балла)	1. Выберите выражения, которые задают линейную функцию А) $y = \frac{4}{3} + \frac{1}{5x}$ ; Б) $y = 2x + 3$ ; В) $y = x^2 - 3$ ; Г) $z = 3(1 - t)$ .	Б, Г
2-ой уровень Воспроизведение (3-4 балла)	2. Дана линейная функция $f(x) = 100x - 2$ . Вычислите: А) $f(0)$ ; Б) $f(-1)$ ; В) $f(-2,4)$ .	А) -2; Б) -102; В) -26.
3-ый уровень Применение в знакомой ситуации (5-6 баллов)	3. Выберите точки, которые принадлежат функции $y = 3x - 2$ А) А(0;5); Б) В(2;-1);; В).С(2;-5) Г) D(-10;0) Д) М(1,1) Е) К(-1;11)	Д
4-ый уровень Применение в незнакомой ситуации (7-8 баллов)	4. Функция задана формулой $y = 6x - 2$ . Существует ли такое значение $x$ , при котором значение функции равно значению аргумента. Если да, то какое?	0,4
5-ый уровень Творческий (9 баллов)	5. Найдите $k$ и $b$ , если известно, что прямая $y = kx - b$ параллельно прямой $y = 2x$ и проходит через точку А(-8,4).	$k=2, b=20$

#### IV. Оценочно-рефлексивный этап

<i>А теперь ответьте, пожалуйста, на ниже приведенные вопросы!</i>	
1. Усвоили ли вы понятие «линейная функция»?	а) да; б) нет;
2. Если нет, то что вам помешало?	а) незнания определения прямая пропорциональность; б) не умею строить графики функции прямой пропорциональности в) другой ответ _____
3. С каким настроением вы работали на уроке?	а) хорошее; б) нормальное; в) плохое.

#### V. Домашнее задание

<i>Уровень усвоения материала</i>	<i>Задание</i>
<b>1-ый уровень</b> <i>Узнавание (1-2 балла)</i>	Учебник стр. 89-93, упр.№ 2.63
<b>2-ый уровень</b> <i>Воспроизведение (3-4 балла)</i>	Учебник упр.№2.66(1,2)
<b>3-ый уровень</b> <i>Применение в знакомой ситуации (5-6 баллов)</i>	Учебник упр.№2.68 (1)
<b>4-ый уровень</b> <i>Применение в незнакомой ситуации (7-8 баллов)</i>	Учебник упр.№2.72(2)
<b>5-ый уровень</b> <i>Творческий (9 баллов)</i>	Учебник упр.№2.76(1)

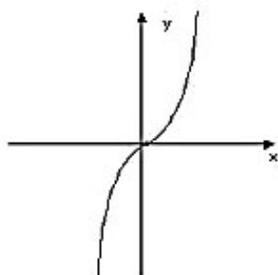
**Факультативные занятия «Понятие функции»**

**Урок 1. График линейной функции**

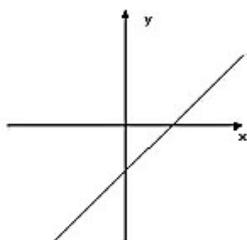
**1 уровень.** Усвоения материала

**Задание 1.1.** Какие из построенных графиков являются графиками линейной функции, сколько точек достаточно для того, чтобы построить график линейной функции и почему?

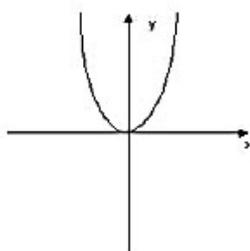
1)



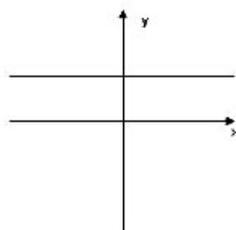
2)



3)



4)



**2уровень.** Воспроизведение материала

**Задание 2.1.** В одной системе координат изобразите графики функций, заданных формулами  $y = 2x$  и  $y = 2x - 3$ .

**Задание 2.2.** .Велосипедист движется со скоростью 10 км/ч. Записать формулу зависимости его пути  $s$  от времени движения  $t$ (в часах). Построить график этой зависимости на первых пяти километрах.

**3 уровень.** Применения в знакомой ситуации

**Задача 3.1.** В одной системе координат изобразите графики функций, заданных формулами:

$$y = 4x - 1, \quad y = 4x + 1, \quad y = -4x + 1, \quad y = -4x - 1.$$

Запишите координаты точек пересечения каждого графика с осями  $Ox$  и  $Oy$ .

**Задача 3.2.** На рисунке 1 изображены прямые — графики линейных функций. Для каждой прямой напишите формулу, задающую соответствующую функцию.

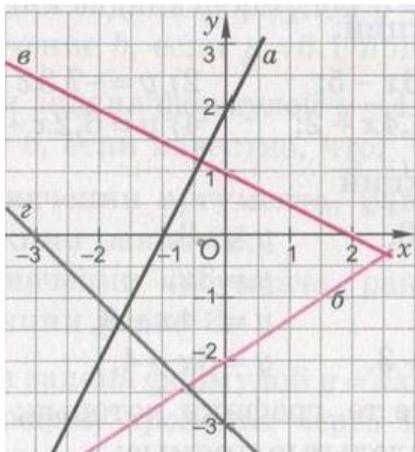


Рисунок 1

**Задание 3.3.** Построить график функции  $y = -0,5x - 2$  и указать по графику несколько значений  $x$ , при которых значения функции положительны; отрицательны.

**4 уровень.** Применения в незнакомой ситуации

**Задание 4.1.** Функция задана формулой  $y = kx + b$ . Известно, что ее график проходит через точку  $B(-4; 2)$  и параллелен графику функции  $y = 5x + 2$ . Изобразите график заданной функции

**Задание 4.2.** Графиком линейной функции является прямая, параллельная оси  $Ox$  и проходящая через точку:

1)  $A(2;7)$ ;

2)  $B(-15;-4)$ .

Задайте формулой эту функцию и изобразите ее график.

**5 уровень.** Творческий

**Задача 5.1.** Постройте график уравнений  $(2y - x + 1)(y^2 - 1) = 0$

## Урок 2. Линейная функция

**1 уровень.**

**Задание 1.1.** Какой из формул задана линейная функция:

1)  $y = x^2 - 3 - (x + 2)x$ ;

2)  $y = 5 - x^2 - (x - 1)x$ ;

3)  $y = 2x - 5 - (3x + 1)$ ;

4)  $y = -7x + 8 - (2x + 15)$ .

**2уровень.** Воспроизведение материала

**Задача 2.1.** Задана функция  $y = 2x - 3$ . Найти значение функции, соответствующее значению аргумента, равному: 0; -2; -1,5.

При каком значении аргумента значение функции равно: 5; 0; -7?

Составить таблицу соответствующих значений.

**Задача 2.2.** На складе было 400 т угля. Ежедневно на склад привозили еще по 50 т. Выразить формулу зависимость количества угля  $p$  (в тоннах) от времени  $t$  (в днях).

**3 уровень.** Применения в знакомой ситуации

**Задание 3.1.** Найдите координаты точек пересечения с осями  $Ox$  и  $Oy$  графика функции, заданной формулой:

1)  $y = 0.6x - 18$ ;

2)  $y = 25 + 0.5x$ .

**Задание 3.2.** Функция задана формулой  $y = 6x - 2$ .

- 1) При каких значениях аргумента значения функции положительны?
- 2) При каких значениях аргумента значения функции неположительны?
- 3) Существует ли такое значение  $x$ , при котором значение функции равно значению аргумента?
- 4) Существует ли такое значение  $x$ , при котором значение функции противоположно значению аргумента?

**Задача 3.3.** Найти координаты точки пересечения графиков функции  $y = -2x + 7$  и  $y = 0,5x + 5,5$ .

**4 уровень.** Применения в незнакомой ситуации

**Задача 4.1.** Функция задана формулой  $y = 4x + b$ . Найдите значение  $b$ , если известно, что:

- 1) при значении аргумента, равном 2, значение функции равно 22;
- 2) при значении аргумента, равном 4, значение функции равно 3.

**Задача 4.2.** Из функций

$$y = 4x + 3;$$

$$y = -4x;$$

$$y = 4x;$$

$$y = -4x + 3;$$

$$y = -3;$$

$$y = 3x;$$

$$y = -4x - 3;$$

$$y = 3x - 4.$$

Выберите те, графики которых параллельные прямые.

**5 уровень.** Творческий

**Задание 5.1.** При каких значениях  $a$  точка  $M(a; -2a)$  принадлежит графику функции:

$$1) y = -3,5x - 1;$$

$$2) y = 8x + 6;$$