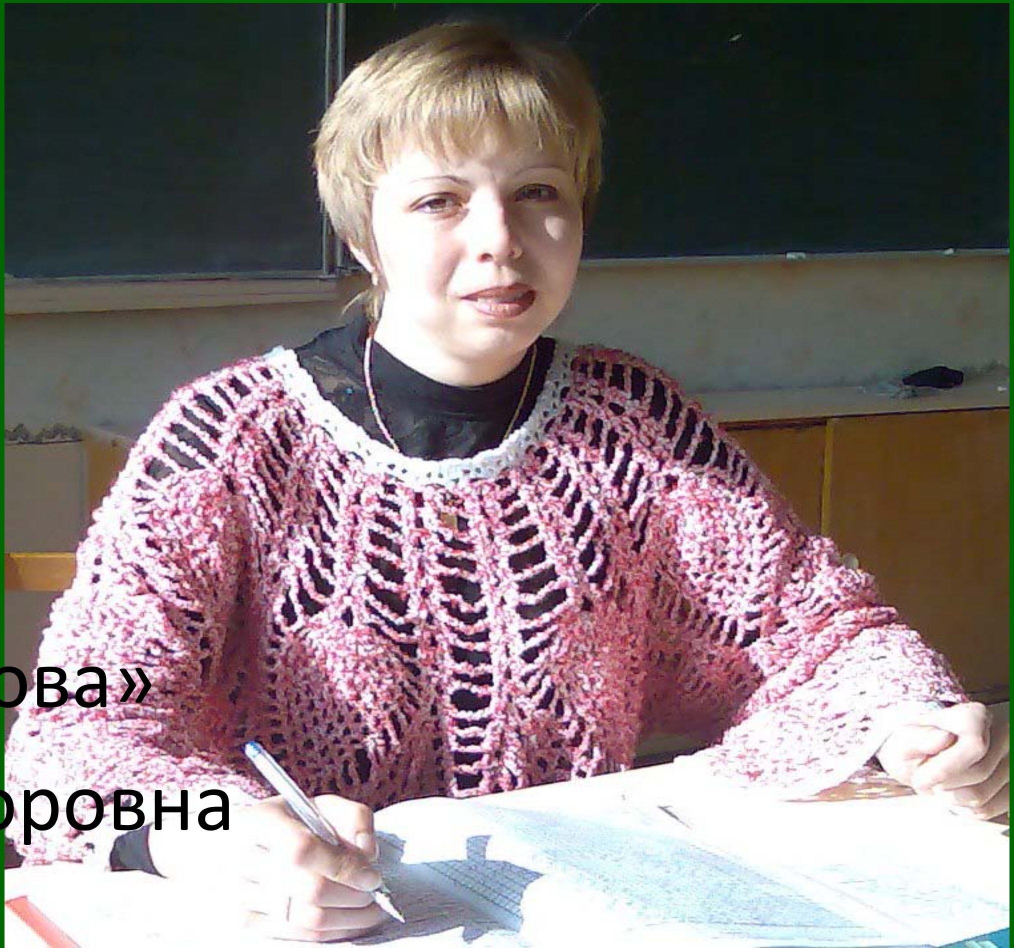
Презентация для факультативного занятия по математике в 9 классе



Учитель математики

высшей категории

ГУО «Гимназия г. Быхова»

Данилова Елена Викторовна

Тема:

«Основные методы решения нелинейных систем алгебраических уравнений»

МЕТОД ПРИВЕДЕНИЯ К КВАДРАТНОМУ УРАВНЕНИЮ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ

ОБРАТНОЙ ТЕОРЕМЕ ВИЕТА

$$\begin{cases} x \pm y = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

По теореме обратной теореме Виета, числа х и у, удовлетворяющие системе, являются корнями квадратного уравнения

$$\mathbf{t^2 - at + b = 0}$$

t_1 и t_2 – корни этого уравнения, то решениями системы являются две пары чисел $(t_1, t_2), (t_2, t_1)$

Пример. Решить систему: $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8. \end{cases}$

По теореме, обратной теореме Виета, числа x и y

являются корнями уравнения

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$t_1 = 2, t_2 = 4$$

тогда решением системы

будут пары чисел

$$(2, 4); (4, 2)$$

Примеры для самостоятельного решения

1 $\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2y - x = 2, \\ 2xy = 3. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x + 5y = -2, \\ 5xy = -8. \end{cases}$

6 $\begin{cases} 5x - 3y = 5, \\ 5xy = -2. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18. \end{cases}$

7 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ xy = 10. \end{cases}$

4 $\begin{cases} x - y = 4, \\ xy = 5. \end{cases}$

8 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ xy = 21. \end{cases}$

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ НА МНОЖИТЕЛИ ("РАСПАДАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ")

Пример. Решить систему:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + x - y = 0, \\ 2x^2 + 2xy = x + y. \end{cases}$$

Решение: Перегруппируем члены уравнения

$$\begin{cases} (x^2 - 2xy + y^2) + (x - y) = 0, \\ (2x^2 + 2xy) - (x + y) = 0. \end{cases}$$

Разложим на множители

$$\begin{cases} (x-y)^2+(x-y)=0, \\ 2x(x+y)-(x+y)=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-y)(x-y+1)=0, \\ (x+y)(2x-1)=0; \end{cases}$$

Система равносильна совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 0, \\ 2x - 1 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x + y = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x - 1 = 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

В совокупность входят линейные уравнения, решением являются пары чисел:

$(0; 0); (0,5; 0,5); (-0,5; 0,5); (0,5; 1,5)$

Примеры для самостоятельного решения

1 $\begin{cases} (2x-1-y)(2x-1+y)=0, \\ 4x^2+y^2-3xy=1. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x+y=4, \\ (x^2-y^2)(x-y)=16. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x^3-y^3=124, \\ (x^2+xy+y^2)=31. \end{cases}$

4 $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = -2. \end{cases}$

5 $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2y - xy^2 = -20. \end{cases}$

6 $\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ y^2 - xy = -1. \end{cases}$

МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ

Пример. Решить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2X - У} + \dfrac{1}{2У - X} = 3, \\ \dfrac{4}{2У - X} - \dfrac{1}{2X - У} = 2; \end{cases}$$

Решение. Введем новые переменные

$$u = \frac{1}{2X - У} \qquad v = \frac{1}{2У - X}$$

Получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ 4v - u = 2. \end{cases}$$

Решением этой системы является пара чисел $\boldsymbol{u = 2, v = 1}$.

Вернемся к переменным x и y.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x - y} = 2, \\ \dfrac{1}{2y - x} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - x = 0{,}5, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$$

Решением является пара чисел ($\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$).

Примеры для самостоятельного решения

1 $$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y-1}+\dfrac{1}{x-y+1}=1, \\ \dfrac{5}{x+y-1}-\dfrac{3}{x-y+1}=1. \end{cases}$$

2 $$\begin{cases} \dfrac{5}{2x+5y}+\dfrac{6}{5x+2y}=\dfrac{13}{100}, \\ \dfrac{25}{2x+5y}-\dfrac{20}{5x+2y}=\dfrac{7}{30}. \end{cases}$$

$$3\quad \begin{cases} \dfrac{2}{3y}+\dfrac{x+y}{2y}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{2}=\dfrac{4}{15}. \end{cases}$$

$$4\quad \begin{cases} \dfrac{4}{x+y+1}=\dfrac{2}{x-y+1}, \\ \dfrac{x-y-1}{-1}=\dfrac{x+y+1}{3}. \end{cases}$$

Симметрические системы уравнений

$$Q(x, y) = Q(y, x)$$

симметрическим многочленом

от двух переменных.

$$s_1 = x + y, s_2 = xy$$

основные симметрические многочлены

Пример. Решить систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5x + 5y + 3xy = 15, \\ x^2 + y^2 - x - y + xy = 1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Введем новые переменные

$a = x+y$, $в = xy$,

тогда $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = a^2 - 2в$

и система примет более простой вид

$$\begin{cases} a^2 + 5a + в = 15, \\ a^2 - a - в = 1. \end{cases}$$

Полученную систему решим методом подстановки

$$\begin{cases} a^2 + 5a + (a^2 - a - 1) = 15, \\ \text{в} = a^2 - a - 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + 2a - 8 = 0, \\ \text{в} = a^2 - a - 1. \end{cases}$$

Корнями первого уравнения являются -4 и 2.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -4, \\ \text{в} = a^2 - a - 1; \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2 \\ \text{в} = a^2 - a - 1; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -4, \\ \text{в} = 19; \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2 \\ \text{в} = 1; \end{cases} \end{array} \right.$$

Вернемся к переменным x и y.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=-4,\\ xy=19;\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=2\\ xy=1;\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система последней совокупности не имеет решений, а решением второй служит пара x=1;y =1.

Примеры для самостоятельного решения

1 $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11. \end{cases}$

4 $\begin{cases} 2x + 2y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 8. \end{cases}$

Системы, содержащие однородное уравнение.

Многочлен от двух переменных x и y является

однородным многочленом

степени k, если составляющие его одночлены от переменных x и y имеют одну и ту же степень, равную k.

Пример. Решить систему:

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ 3x^2 - x^2y = 8y. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Первое уравнение системы – это однородное уравнение второй степени.

Решим его как квадратное уравнение относительно x с параметром y:

$$x = \frac{5y \pm \sqrt{25y^2 - 24y^2}}{2} = \frac{5y \pm y}{2}$$

Отсюда получим x=2y, x=3y. Значит, данная система равносильна совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y, \\ 3x^2 - x^2y = 8y; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3y, \\ 3x^2 - x^2y = 8y; \end{cases} \end{array}\right.$$

Системы этой совокупности решаются подстановкой значения x из первого уравнения во второе.

В результате получим ответ :

$(0;0),(2;1),(4;2),(1;\frac{1}{3}),\left(8;\frac{8}{3}\right).$

Примеры для самостоятельного решения

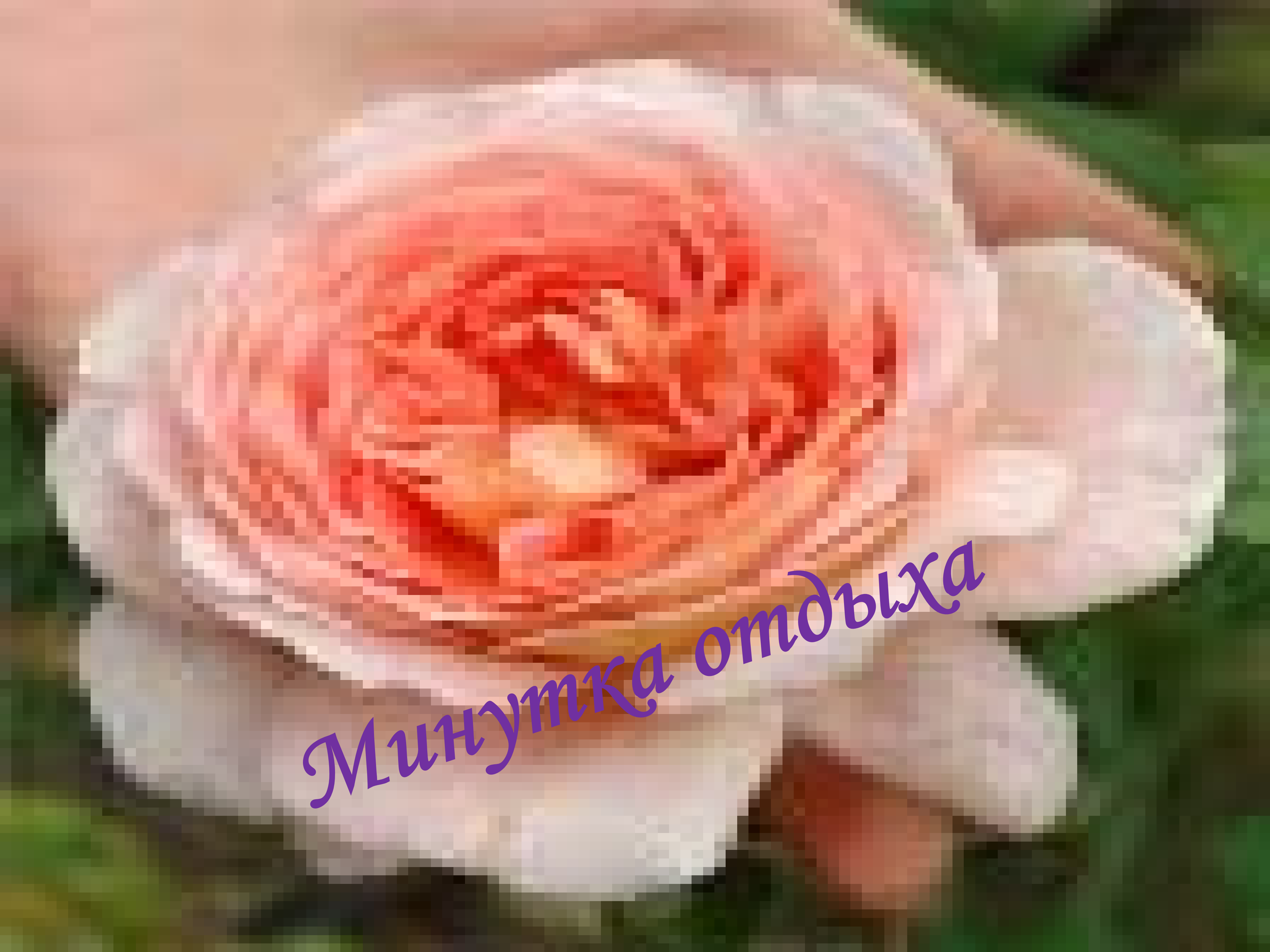
1 $\begin{cases} y^2 - 2xy - 3x^2 = 0, \\ y^2 - xy - 2x^2 = 4. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 0. \end{cases}$

3 $\begin{cases} xy + y^2 = 4, \\ x^2 - 2xy - y^2 = 2. \end{cases}$

4 $\begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 = 2, \\ 2x^2 - 2xy + 3y^2 = 3. \end{cases}$

5 $\begin{cases} x^2 - 2xy = 2x - 3y, \\ y^2 - 3xy = 4x - 6y. \end{cases}$


Минутка отдыха

Проверь себя

Определи метод решения систем уравнений

1 $\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ xy = 10. \end{cases}$

Симметрические системы

Метод приведения к квадратному уравнению

3 $\begin{cases} \dfrac{1}{2X - У} + \dfrac{1}{2У - X} = 3, \\ \dfrac{4}{2У - X} - \dfrac{1}{2X - У} = 2; \end{cases}$

4 $\begin{cases} xy + y^2 = 4, \\ x^2 - 2xy - y^2 = 2. \end{cases}$

Метод замены переменных

Система с однородным уравнением

5 $\begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 = 2, \\ 2x^2 - 2xy + 3y^2 = 3. \end{cases}$

Симметрические системы

6 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 0. \end{cases}$

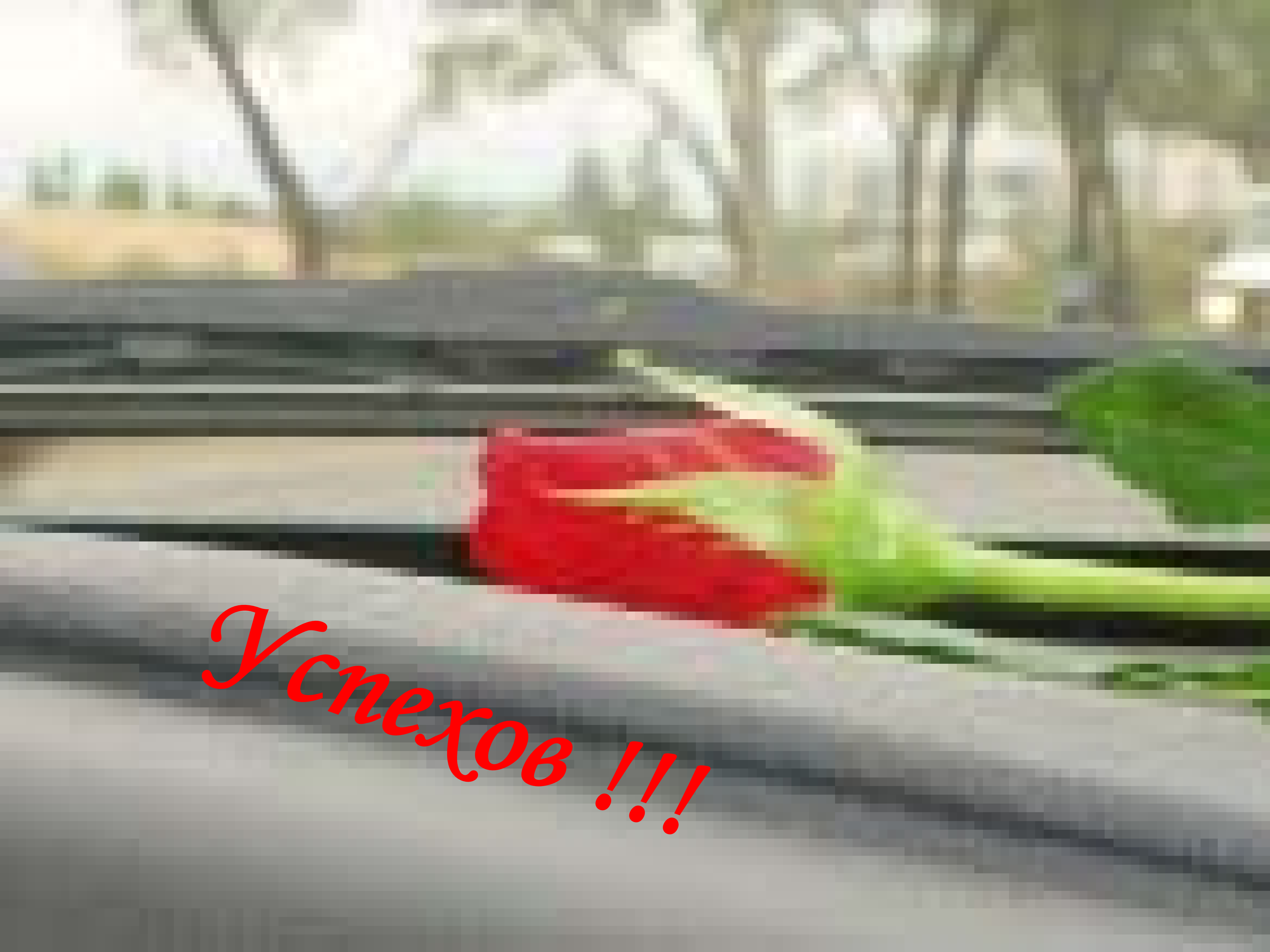
Система с однородным уравнением

7 $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18. \end{cases}$

Метод приведения к квадратному уравнению

8 $\begin{cases} (2x - 1 - y)(2x - 1 + y) = 0, \\ 4x^2 + y^2 - 3xy = 1. \end{cases}$

Распадающиеся системы


Успехов !!!

Рефлексия

Ответьте, пожалуйста, на следующие вопросы:

- Доволен(а) ли ты тем, как прошел урок?
- Было ли тебе интересно?
- Что больше всего тебе понравилось на уроке?
- Сумел(а) ли ты закрепить свои знания?
-Ты сумел(а) показать свои знания?
-Ты был(а) активен(а) на уроке?
- Учитель был внимателен к тебе?

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!

ЖЕЛАЮ ВАМ УСПЕШНОГО УСВОЕНИЯ ТЕМЫ!