Т. Л. Короленя,
учитель математики гимназии № 1 г. Слонима

Презентация опыта «Факультатив по математике. Применение свойств функций при решении уравнений и неравенств»

Программа по математике для средней общеобразовательной школы предполагает формирование у школьников представления о математике как о части общечеловеческой культуры, как об определенном методе познания мира. Но как в современных условиях выполнить требования программы, если объем знаний, необходимый человеку, резко возрастает, а количество отводимых для занятий часов сокращается?

Для качественной реализации программы школьного курса математики и решения имеющихся проблем был осуществлен переход школы на профильное обучение и введены факультативные занятия. Часто временные рамки урока не позволяют рассмотреть все вопросы, связанные с решением уравнений и неравенств, которые составляют значительную часть школьного курса математики.

С каждым уравнением, неравенством связаны конструирующие их аналитические выражения. Последние в свою очередь могут задавать функции одной или нескольких переменных. Поэтому функции, а точнее их свойства, не могут не влиять на решение задач такого рода. Просто в одних случаях мы как бы негласно используем свойства функций, в других явно ссылаемся на них. Изученные свойства функций и методы их исследования должны найти применение в школе при решении уравнений, неравенств. В школьном курсе математики рассмотрение этих вопросов остается незначительным, но на ЦТ достаточно часто встречаются задания, решаемые с помощью применения свойств функций. Поэтому целесообразно этот материал включать в программу факультативных занятий.

- **Решение уравнений и неравенств с использованием общих свойств функций**

Не всякое уравнение или неравенство в результате преобразований может быть сведено к уравнению или неравенству, для которого существует определенный метод решения. В таких случаях ключевую роль могут сыграть такие свойства функций, входящих в уравнение или неравенство, как ограниченность, монотонность, четность, выпуклость и другие. Решение уравнений и неравенств с использованием свойств функций часто основывается на следующих соображениях и утверждениях:

1. Непосредственная подстановка чисел из ОДЗ переменных может позволить в определенных ситуациях найти решение уравнения (или неравенства).
2. Если для всех *x*: из некоторого промежутка *X* справедливы неравенства $f(x) > A$ и $g(x) < A$, где *A* – некоторое число, то на множестве *X* уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) < g(x)$ решений не имеют.

3. Если для всех x из некоторого промежутка X справедливы неравенства $f(x) \geq A$ и $g(x) \leq A$, где A – некоторое число, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

4. Пусть $f(x)$ – непрерывная и монотонная функция на промежутке X, тогда уравнение $f(x) = a$, *где* a – данная константа, может иметь не более одного решения на промежутке X.

5. Пусть $f(x)$ *и* $g(x)$—непрерывные на промежутке X функции, $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает на этом промежутке. Тогда уравнение

$g(x) = f(x)$ может иметь не более одного решения на промежутке X.

6. Если $f(x)$– возрастающая функция, то уравнение $f\big(f(x)\big) = x$ равносильно уравнению $f(x) = x$.

Отметим, что если $f(x)$ не является возрастающей функцией, то уравнение $f\big(f(x)\big) = x$ является следствием уравнения $f(x) = x$.

7. Если $f(x)$ монотонная функция, то уравнение

$f(\varphi(x)) = f(\psi(x))$ равносильно уравнению $\varphi(x) = \psi(x)$.

При решении уравнений (или неравенств) часто **применяют различные числовыенеравенства**.

1. Неравенство Коши (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух неотрицательных чисел).

Если $a \geq 0, b \geq 0, \text{то } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$.

Равенство достигается только при $a = b$. Если же $a \neq b, \text{то} \frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b}.$

2. Неравенство Коши для n переменных.

$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, где $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \ldots, a_n \geq 0$.

Равенство достигается при $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

3. Сравнимость взаимообратных величин

$a + \frac{1}{a} \geq 2, \text{где } a > 0$. Равенство достигается при $a = 1$;

$a + \frac{1}{a} \leq -2, \text{где } a < 0$. Равенство достигается при $a = -1$.

4. Неравенство Бернулли $(1 + x)^n \geq 1 + nx, \text{где } x > -1, n \in N$. Равенство достигается при $x = 0$ или $n = 1$.

5. Неравенство Коши – Буняковского

$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$, где $n \geq 2$

6. Если $a \cdot b \geq 0, \text{то} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq a \cdot b$.

7. $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Равенство достигается при $a = b$.

8. $|a \cdot \sin f(x) + b \cdot \cos f(x)| \le \sqrt{a^2 + b^2}$.

9. $|x + y| \le |x| + |y|$.

Равенство достигается только при $x \cdot y \ge 0$.

10. $|x - y| \ge |x| - |y|$.

- **Использование области определения функции**

Если при рассмотрении уравнения (неравенства) выясняется, что обе его части определены на множестве X, состоящем из одного или нескольких чисел, то нет необходимости проводить какие-либо преобразования уравнения или неравенства. Достаточно проверить, является или нет каждое из этих чисел решением данного уравнения (неравенства).

Если множество X, на котором определены обе части уравнения (неравенства), окажется пустым множеством, то в этом случае уравнение (неравенство) решений не имеет.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{3x - x^2} = log_5(x^2 - 2x - 3)$.

ОДЗ этого уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $\begin{cases} 3x - x^2 \ge 0, \\ x^2 - 2x - 3 > 0. \end{cases}$

Данная система неравенств решений не имеет, а это значит, что ОДЗ есть пустое множество. Этим решение уравнения и завершается, т. к. установлено, что ни одно число не может являться решением, т. е. уравнение не имеет корней.

Ответ: решений нет.

- **Методы решения уравнений и неравенств, основанные на ограниченности функций (метод мажорант)**

В школе при изучении уравнений и неравенств обращается внимание учащихся на нахождение области допустимых значений неизвестного. Однако в стороне остаются вопросы,связанные с областью значений функции. Одним из эффективных методов решения уравнений или неравенств является метод, основанный на использовании ограниченности функций. К наиболее известным ограниченным функциям относятся, например, некоторые тригонометрические функции; обратные тригонометрические функции; функции, содержащие модуль, степень, корень четной степени и т. д.

Пример 2. Решите уравнение $\cos 2\pi x = x^2 - 8x + 17$.

Преобразуемправую часть уравнения $\cos 2\pi x = (x-4)^2 + 1$. Оценим левую и правую части уравнения: $-1 \le \cos 2\pi x \le 1$ и $(x-4)^2 + 1 \ge 1$. Следовательно, равенство достигается, если $\begin{cases} \cos 2\pi x = 1, \\ (x-4)^2 + 1 = 1. \end{cases}$

Решая второе уравнение системы, получаем $x = 4$. Подставляем это значение в первое уравнение и убеждаемся в верности равенства. Следовательно, $x = 4$ корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 4$

Пример 3. Решите уравнение $2\cos(3x^2 - x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$.

ОДЗ – множество действительных чисел. Областьюзначений функции $f(x) = 2\cos(3x^2 - x)$является множество$E(f)$=$[-2; 2]$, областьюзначений функции $g(x)$= $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$является множество $E(g) = [2; +\infty)$. Следовательно, если уравнение имеет решения, то ими могут быть только те значения x, при которых обе функции одновременно принимают значение равное 2. Таким образом, равенство возможно, если выполняется система

$$\begin{cases} 2\cos(3x^2 - x) = 2, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2. \end{cases}$$

Второе уравнение системы имеет единственный корень $x = 0$. Проверкой убеждаемся, что он является корнем и первого уравнения.

Ответ: x=0.

Пример 4.Решите уравнение $\log_2\left(cos^2(xy) + \frac{1}{cos^2(xy)}\right) = \frac{1}{y^2 - 2y + 2}$.

Преобразуем знаменатель правой части уравнения

$y^2 - 2x + 2 = (y - 1)^2 + 1$.

Оценим левую и правую части уравнения: *так как* $(y-1)^2 + 1 \geq 1$, то $\frac{1}{y^2 - 2x + 2} \leq 1$; $cos^2(xy) + \frac{1}{cos^2(xy)} \geq 2$, *значит* $\log_2\left(cos^2(xy) + \frac{1}{cos^2(xy)}\right) \geq 1$.

Следовательно, равенство достигается, если $\begin{cases} \log_2\left(cos^2(xy) + \frac{1}{cos^2(xy)}\right) = 1, \\ (y-1)^2 + 1 = 1. \end{cases}$

Решая второе уравнение системы, получаем $y = 1$. Подставляя это значение в первое уравнение, получаем $\cos^2 x = 1$. Следовательно, $y = 1$, $x = \pi n, n\epsilon Z$ решения исходного уравнения.

Ответ: $y = 1$, $x = \pi n, n\epsilon Z$.

Пример 5.Решите неравенство

$$(x^2 - 4x + 3)log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(cos^2\pi x + \cos x + 2\sin^2\frac{x}{2}\right) \geq 2.$$

Преобразуем левую часть неравенства:

$$-2((x-2)^2 - 1)log_2\left(cos^2\pi x + (1 - 2\sin^2\frac{x}{2}) + 2\sin^2\frac{x}{2}\right) \geq 2,$$

$$(1 - (x-2)^2)log_2(cos^2\pi x + 1) \geq 1.$$

Оценим выражения в левой части неравенства: $(1 - (x-2)^2) \leq 1$,

т.к. $1 \leq cos^2\pi x + 1 \leq 2$, *то* $0 \leq log_2(cos^2\pi x + 1) \leq 1$.

Следовательно, решением исходного неравенства будет являться решение системы уравнений:

$$\begin{cases} (1-(x-2)^2)=1, \\ log_2(cos^2\pi x+1)=1. \end{cases}$$

Решением первого уравнения является *x=2.* Непосредственной подстановкой убеждаемся, что данное число является решением и второго уравнения.

Ответ: 2.

□ Дискриминантный метод

Решение некоторых задач, в которых явным образом не задан квадратный трехчлен либо квадратное уравнение, в результате преобразований сводится к исследованию дискриминанта некоторого квадратного трехчлена. Различная постановка задач накладывает разные требования на знак дискриминанта.

Пример 5.Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$y=\frac{2x+1}{x^2-x+1}$.

Рассмотрим заданное равенство как уравнение с неизвестным *x* и параметром *y*: $yx^2-yx+y=2x+1$, после преобразований получим

$yx^2-(y+2)x+y-1=0.$

Исходную задачу можно переформулировать следующим образом: при каких значениях параметра *y*уравнение

$y\,x^2-(y+2)\,x+y-1=0$имеет решения?

Если $y=0$, то уравнение $-2x-1=0$– линейное и оно имеет решение.

Если $y\neq 0$, то для того чтобы квадратное уравнение имело решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$D=(y+2)^2-4y(y-1)=-3y^2+8y+4\geq 0,$

откуда $y\in\left[\frac{4-2\sqrt{7}}{3};\ 0\right)\cup\left(0;\ \frac{4+2\sqrt{7}}{3}\right]$.

Объединив полученные множества, имеем $\frac{4-2\sqrt{7}}{3}\leq y\leq\frac{4+2\sqrt{7}}{3}$.

Следовательно, $y_{min}=\frac{4-2\sqrt{7}}{3}, y_{max}=\frac{4+2\sqrt{7}}{3}$.

Ответ: наибольшее значение$\frac{4+2\sqrt{7}}{3}$; и наименьшее значение $\frac{4-2\sqrt{7}}{3}$.

Пример 6. Найти наибольшее значение выражения x + 2y, если x, y отрицательны и удовлетворяют неравенству $x^2-4xy+y^2+3\leq 0$.

Обозначим значение выражения *x + 2y = a.* Переформулируем условие задачи следующим образом, при каких значениях параметра а система имеет решение$\begin{cases} x\ +\ 2y=a, \\ x^2-4xy+y^2+3\leq 0. \end{cases}$

Выразим переменную х из первого уравнения системы и подставим в неравенство.

$$\begin{cases} x=a-\ 2y, \\ (a-2y)^2-4y(a-2y)+y^2+3\leq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство как квадратное относительно переменной *y.* Преобразуем левую часть неравенства $13y^2-8ay+a^2+3\leq 0$.

Неравенство не имеет решений при D < 0, так как коэффициент при y^2 положительный. При D $\geq$ 0 данное неравенство имеет решение.

$D_1 = 16a^2 - 13(a^2+3) = 3a^2 - 39 \geq 0,$ отсюда $a^2 \geq 13, |a| \geq \sqrt{13}$.

С учетом условия *x < 0, y < 0*,имеем *a = x + 2y < 0*, значит решением задачи является $a \in (-\infty; -\sqrt{13}]$. Наибольшее из решений $a = -\sqrt{13}$.

Т.е. наибольшее значение выражения *x + 2y* равно $-\sqrt{13}$.

Ответ: $-\sqrt{13}$

Пример 7. Найти наименьшее из значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению

$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$

Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно переменной *y*.Уравнение имеет решение, если его дискриминант принимает неотрицательные значения.

$2y^2 + (x-z)y - xz + z^2 + x^2 - 1 = 0,$

$D = x^2 + z^2 - 2xz - 8(z^2 + x^2 - xz - 1) = -7x^2 - 7z^2 + 6xz + 8 \geq 0.$

Исходную задачу можно переформулировать следующим образом:

при каких значениях параметра *x,* квадратное неравенство

$-7z^2 + 6xz + 8 - 7x^2 \geq 0$ имеет решение?

Для того, чтобы данное неравенство $7z^2 - 6xz + 7x^2 - 8 \leq 0$ имело решение, необходимо и достаточно если выполняется условие $D_1 \geq 0$, т.е.

$D_1 = 9x^2 - 7(x^2 - 8) = -40x^2 - 56 \geq 0$.Отсюда получаем $|x| \leq \frac{7}{5}$, т.е. $-\sqrt{\frac{7}{5}} \leq x \leq \sqrt{\frac{7}{5}}$, наименьшее из значений $x = -\sqrt{\frac{7}{5}}$.

Ответ: $-\sqrt{\frac{7}{5}}$.

Задание было предложено на репетиционном тестировании в 2009г. (В12) и может быть решено различными способами.

Найти сумму наименьшего m и наибольшего M значений выражения $x^2 + 3y^2$, *если* $x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$.

1. <u>Дискриминантный.</u>

Обозначим значение выражения $x^2 + 3y^2 = a$. Переформулируем условие задачи следующим образом, при каких значениях параметра а система уравнений имеет решение $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = a, \\ x^2 - 2xy + 3y^2 = 1. \end{cases}$

Умножим второе уравнение системы на*a*. Получим

$ax^2 - 2axy + 3ay^2 = x^2 + 3y^2,$

отсюда $(a-1)x^2 - 3y^2 - 2axy + 3ay^2 = 0.$

Пусть $y \neq 0$, разделим обе части уравнения на y^2 и сделаем замену $\frac{x}{y} = t$. Рассмотрим квадратное уравнение относительно t.

$(a-1)t^2 - 2at + 3a - 3 = 0.$

При D $\geq$ 0 данное уравнение имеет решение. D_1 = $a^2 - (a-1)(3a-3) = -2a^2 + 6a - 3 \geq 0,$ отсюда $\frac{3-\sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

Если $y = 0, mo\ x^2 = 1, значит\ a = 1.$

Наибольшее из значений $M = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$, наименьшее $m = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$, отсюда

$m + M = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{3+\sqrt{3}}{2} = 3.$

Ответ: 3.

2. <u>Оценка множества значений</u>

Представим уравнение $x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$ в виде $x^2 - 2xy + y^2 = 1 - 2y^2$, отсюда $(x-y)^2 = 1-2y^2$. Т.к. левая часть неотрицательна для всех действительных значений переменных, то уравнение будет иметь решение, если $1-2y^2 \geq 0,$ откуда $y^2 \leq \frac{1}{2}$, следовательно наименьшее значения выражения $y^2 = 0$, наибольшее – $y^2 = \frac{1}{2}$. Подставив в уравнение значение y = 0, получим $x^2 = 1$; при $y^2 = \frac{1}{2}, x = y = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$. Подставляя полученные значения в выражение $x^2 + 3y^2$, окончательно имеем

$m=1$, $M=\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 2$. Значит $m+M=3$.

Ответ: 3.

Умение применять необходимые свойства функций при решении уравнений и неравенств позволит учащимся решать их на сознательной основе, использовать различные способы решения, выбирая из них наиболее рациональные, в том числе те, которые не рассмотрены в школьных учебниках. Приведенные методы решения уравнений и неравенств дают возможность учащимся выполнять тестовые и олимпиадные задания без громоздких вычислений и с наименьшими затратами времени.

Литература

1. **Азаров, А. И.** Функциональный и графический методы решения экзаменационных задач / А. И. Азаров, С. А. Барвенов. – Минск: Аверсэв, 2004.

2. **Азаров, А. И.** Математика для старшеклассников. Методы решения алгебраических уравнений, неравенств, систем / А. И. Азаров, С. А. Барвенов. – Минск: Аверсэв, 2004.

3. **Азаров, А. И.** Математика. Задачи-ловушки / А. И. Азаров, С. А. Барвенов, В. С. Романчик. – Минск: Аверсэв, 2006.

4. **Тавгень, О. И.** Математика в задачах. Теория и методы решений. Уравнения, неравенства, системы / О. И. Тавгень, А. И. Тавгень. – Минск: Аверсэв, 2005.

5. **Федорако, Е. И.** Практикум по математике для подготовки к централизованному тестированию / Е. И. Федорако. – Мозырь: Белый ветер, 2013.

6. **Веременюк, В. В.** Математика. Пособие для подготовки к ЦТ / В. В. Веременюк, В. В. Кожушко. – Минск: ТетраСистемс, 2006.