А. В. Зенькович,
учитель математики высшей категории
Лицея БГУ

Тема 1: Понятие угла. Градусная и радианная меры углов. Синус, косинус, тангенс, котангенс угла.

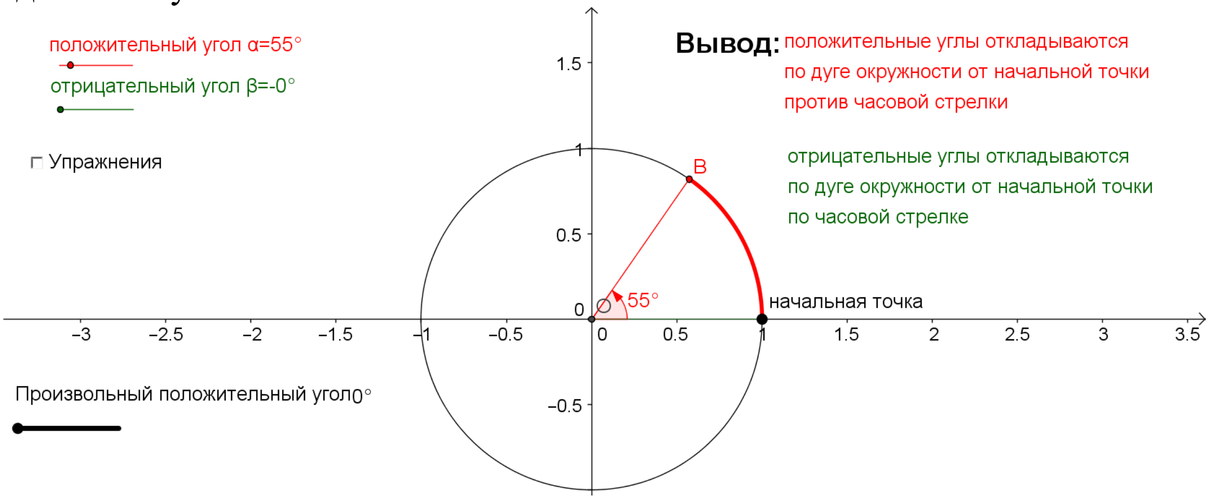
Эта тема является самой первой при изучении раздела «Тригонометрия», понятие угла на единичной окружности –основополагающее в ней и поэтому очень важно первое знакомство с этой темой для учащихся сделать максимально подробным и наглядным. «Хорошо подружившись» с единичной окружностью (или тригонометрическим кругом) значительно проще понимать и все остальные темы тригонометрии.

При помощи программы Geogebra я создала модель единичной окружности, на которой можно «вживую» откладывать углы. Ниже приведены некоторые скриншоты этой модели. Модель состоит из

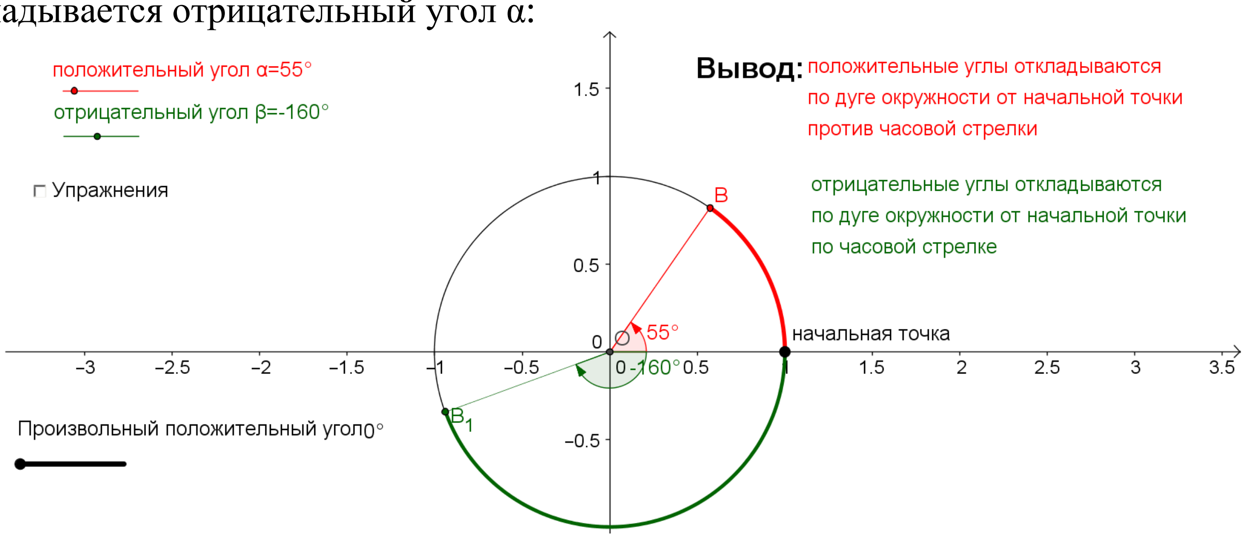
- ✓ единичной окружности,
- ✓ красного ползунка, двигая мышью точку на котором, можно наблюдать, как на окружности откладывается положительный угол α,
- ✓ зеленого ползунка, при помощи которого можно задавать отрицательный угол α на окружности,
- ✓ черного ползунка, позволяющего построить на окружности угол, больший 360°.
- ✓ Упражнений, которые отображают некоторые заранее определенные учителем углы на единичной окружности

Итак, с чего начинается знакомство? Сначала расскажем учащимся, что при помощи такой конструкции можно изобразить совершенно произвольный угол, чего невозможно добиться, если рассматривать только угол в треугольнике. Вспомним, что такое угол. Угол определяется точкой-вершиной и двумя лучами, из нее выходящими. Определим угол в «новых условиях». Вершиной угла всегда является начало координат; одной стороной угла всегда является луч О*x*; а вторая сторона угла – луч ОВ, где В – точка единичной окружности, полученная в результате поворота начальной точки по окружности на угол α).

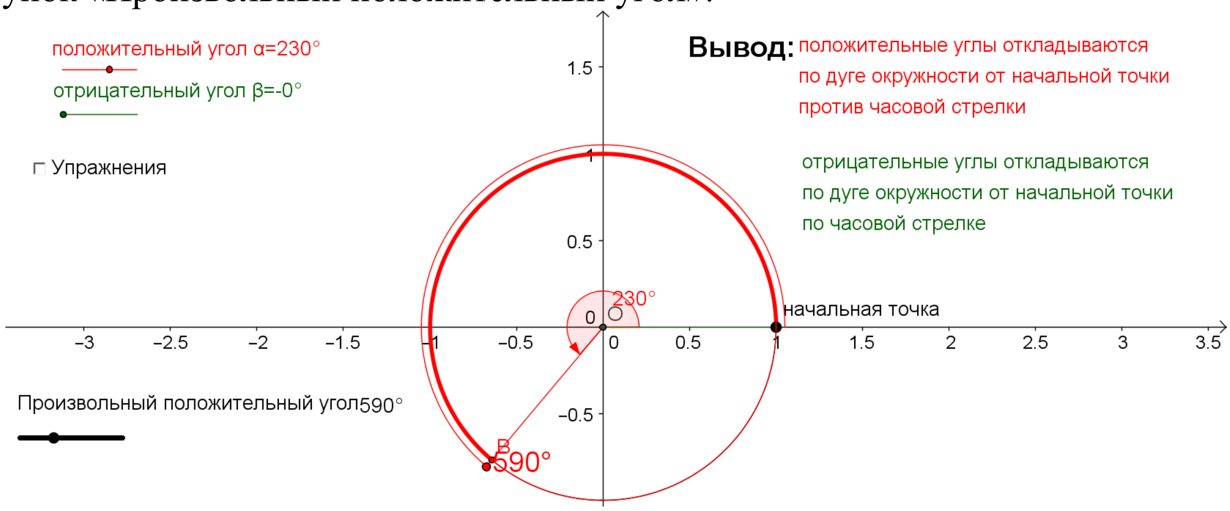
Начинаем эксперимент. Двигаем красный ползунок. При этом точка B двигается по окружности против часовой стрелки и от начала координат откладывается угол α.



Аналогичные действия делаем с зеленым ползунком, в этом случае точка B_1 двигается по окружности по часовой стрелке и от начала координат откладывается отрицательный угол α:



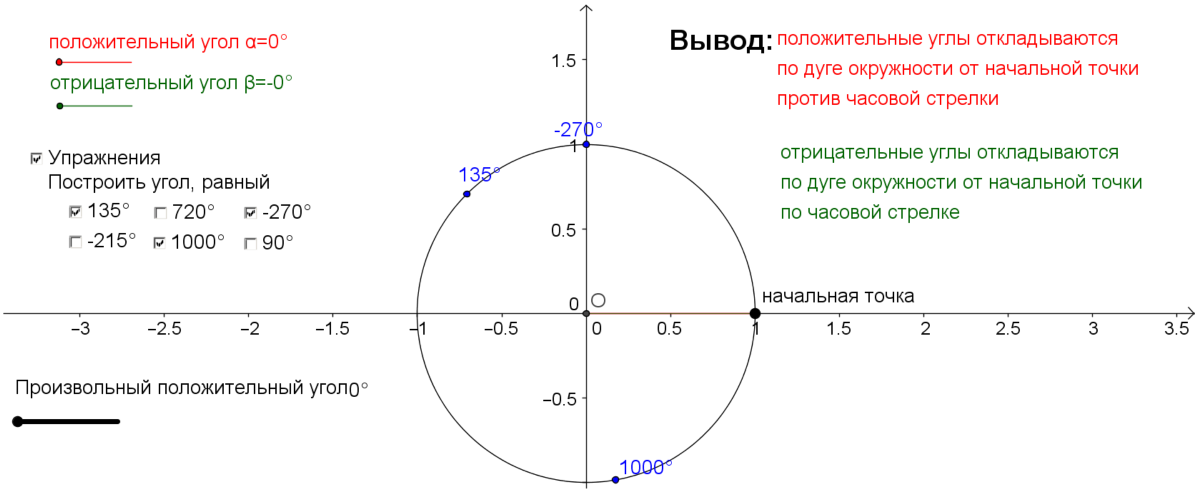
Затем пробуем отложить угол больший 360°. Для этого двигаем черный ползунок «Произвольный положительный угол».



Достигнув 360°, т.е. совершив полный поворот, выходим на второй круг, и, например, угол 590° задается как один полный поворот и еще поворот на 230° против часовой стрелки.

При помощи такой модели быстро и наглядно знакомим учащихся с правилами откладывания произвольных углов на единичной окружности.

Затем вместе с учащимися можно выполнить короткие упражнения и проверить, как хорошо они усвоили материал. Включаем чекбокс «Упражнения» и в модели появляются задания. Выбирая мышью чекбоксы рядом с углами, получаем соответствующие этим углам точки на единичной окружности.



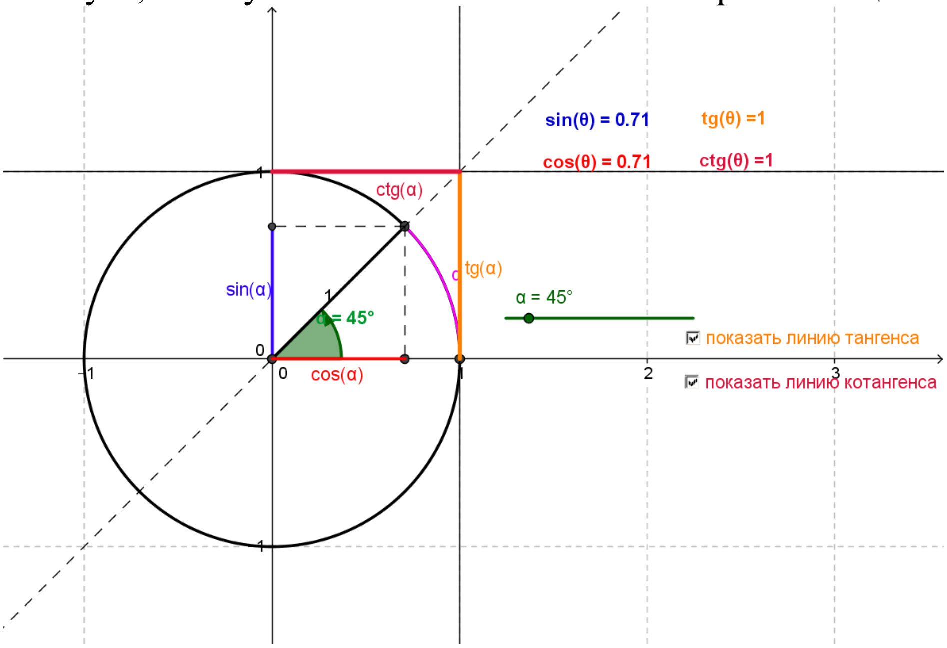
Эту модель я размещаю также в интернете на сайте ДО и учащиеся имеют возможность самостоятельно с ней работать дома в любое время и любое количество раз.

Следующим этапом знакомства с основными понятиями тригонометрии определим радианную меру углов. Вспомним число π, сассоциируем это число с углом 180° и попробуем выполнить те же задания, что и в ранее рассмотренной модели, но вместо 135° рассмотрим угол $\frac{3\pi}{4}$, вместо 720° угол 4π и т.д.

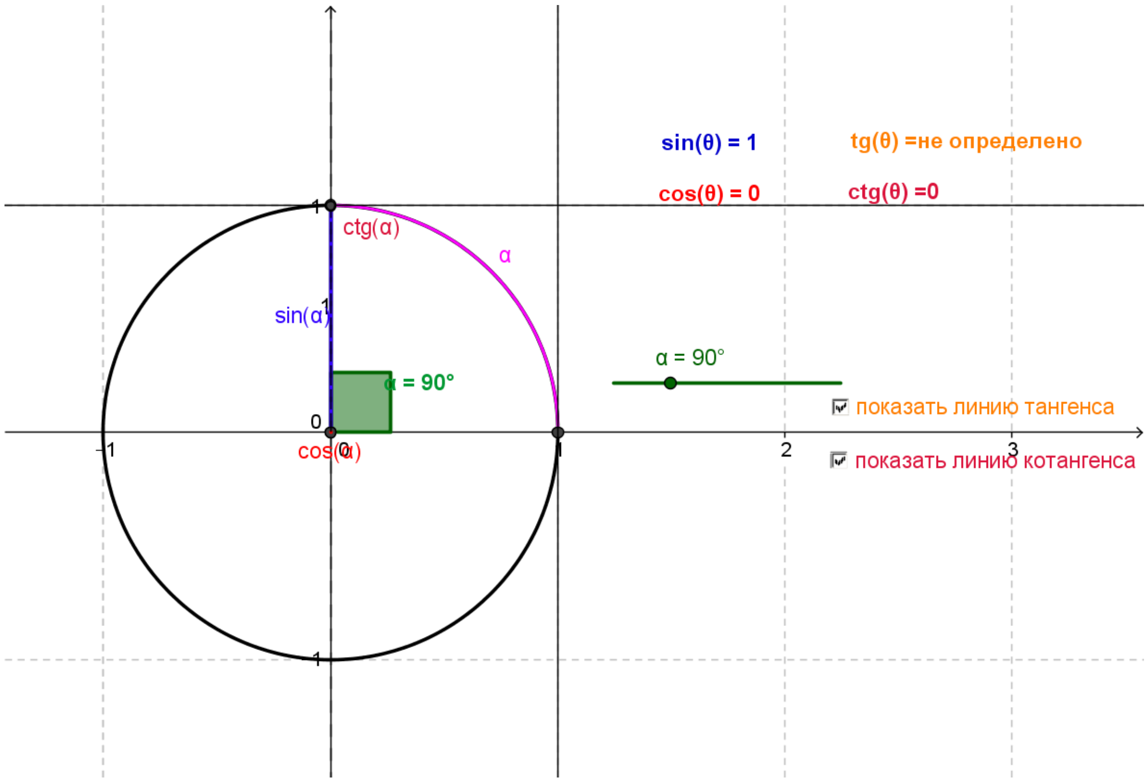
Отметим на единичной окружности углы $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi; \frac{5\pi}{2}; \ldots$ и заметим, что все «четные π» оказываются в крайней правой точке окружности, а все «нечетные π» оказываются в крайней левой точке окружности. Тогда, например, угол $\frac{231\pi}{4}$ нужно сначала представить как $\frac{231\pi}{4} = \frac{232\pi - \pi}{4} = 58\pi - \frac{\pi}{4}$, а затем нужно отложить на окружности 29 полных оборотов ($58\pi = 2\pi \cdot 29$) и по часовой стрелке отложить угол $\frac{\pi}{4}$.

Для определения тригонометрических функций угла я также использую модель. Отталкиваясь от известного учащимся факта, что, например, синус острого угла прямоугольного треугольника это отношение противолежащего катета к гипотенузе, получаем, что синусом острого угла α является *у*-

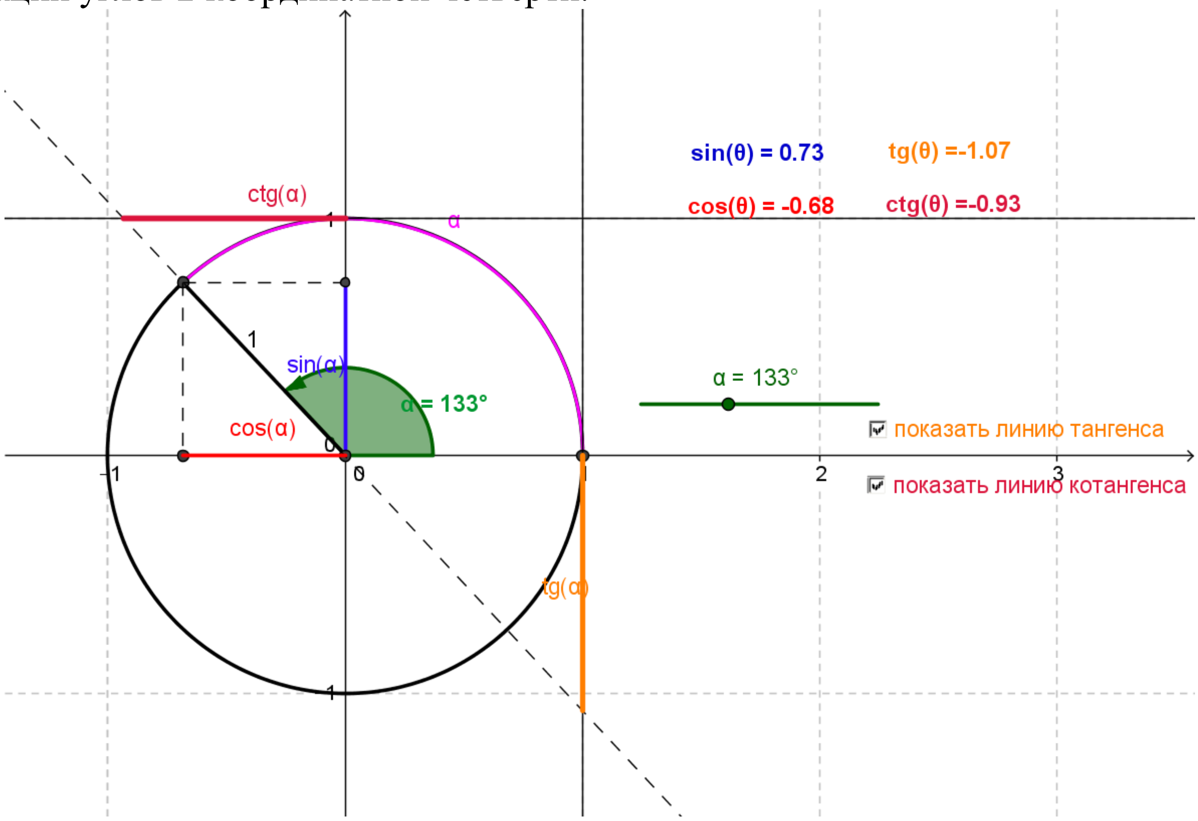
координата точки единичной окружности, соответствующей углу α, а для всех других углов обобщаем это наблюдение. Аналогичное рассуждение проводим для косинуса, а в случае тангенса и котангенса строим специальные линии.



И снова начинаем эксперимент. Перемещая на ползунке точку, наблюдаем за изменением угла α и значений его тригонометрических функций. Замечаем, что с ростом α от 0 до π значение $\cos\alpha$ уменьшается от 1 до -1, при переходе же угла α через $\frac{\pi}{2}$ знак $\cos\alpha$ меняется с «+» на «-». Что касается синуса, то при изменении α от 0 до π значение $\sin\alpha$ все время остается положительным, при росте α от 0 до $\frac{\pi}{2}$ $\sin\alpha$ также увеличивается, а при росте α от $\frac{\pi}{2}$ до π $\sin\alpha$ уменьшается. Затем экспериментальным путем устанавливаем, что тангенс 90° не существует, и тут же обосновываем этот факт, вспомнив, что $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cos 90° = 0$, а на 0 делить нельзя.

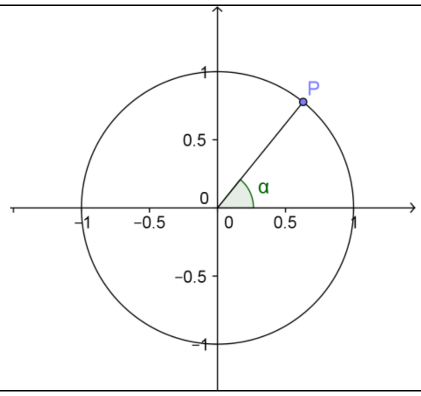
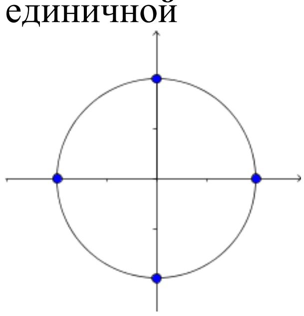
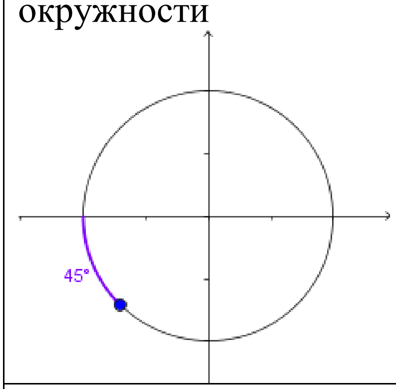


Продолжаем экспериментировать определяем тригонометрические функции углов 2 координатной четверти.



При помощи подобных моделей можно буквально «потрогать» новые понятия, варьируя значения одной величины и наблюдая за изменениями связанных с ней других величин. Конечно же, подобные эксперименты можно организовать и на обычной доске, но на это потребуется несравненно больше времени. Использование же моделей не только увеличивает наглядность, но и значительно экономит время. Порой учащимся и без слов все становится понятно, достаточно увидеть как работает новое понятие «в движении».

Для закрепления материала учащимся в качестве домашнего задания предлагается тест, который они выполняют на сайте ДО. Некоторые задания этого теста приведены ниже:

1. Верно или неверно? Синус угла α равен *x* координате точки P.	
2. Определите, в какой координатной четверти находится угол: $-\frac{7\pi}{6};\frac{211\pi}{3};\frac{73\pi}{8};1000°;-280°;9;-11$	
3. Укажите все возможные значения углов, соответствующих отмеченным на единичной окружности точкам. 	Выберите один ответ: ○ $-\frac{\pi}{2}+\pi n; n\in Z$; ○ $\pi n; n\in Z$; ○ $\frac{\pi}{2}+\pi n; n\in Z$; ○ $\frac{\pi n}{2}; n\in Z$
4. Выберите значения углов, соответствующих отмеченной на единичной окружности точке. 	Выберите несколько ответов: ☐ 585°; ☐ -135°; ☐ 225°; ☐ -225°
5. Вычислите $2tg\frac{27\pi}{4}-4\sqrt{3}\cdot\sin\left(-\frac{214\pi}{3}\right)+\sqrt{27}\cdot ctg\left(-\frac{127\pi}{6}\right)$.	

Выполняя домашнее задание в таком формате учащиеся сразу же по завершении теста могут видеть какие задания они выполнили правильно, а в каких допустили ошибки, а учитель имеет возможность оставлять комментарии и отзывы как на правильные, так и на неправильные ответы. Учитель же может видеть в каких задания какие ученики допустили ошибки и при желании может выставить отметку за домашнее задание в журнал.