Решение текстовых задач при подготовке учащихся к ЦТ по математике

В. И. Инышева,
учитель математики высшей категории
гимназии г. Быхова

В настоящее время традиционные формы проведения выпускных и вступительных экзаменов по математике заменены тестированием. Такие изменения диктуют и новые методы подготовки к этим серьезным испытаниям. Достаточно сказать, что тестовые задания составляются так, что даже небольшие пробелы в знаниях ведут к существенным потерям в баллах.

Для успешного решения разнообразных задач за ограниченный промежуток времени выпускник обязан:

- ✓ иметь отработанную технику «ручного» счета и владеть эффективными алгоритмами решения стандартных задач;
- ✓ помимо формальных знаний формул и теорем демонстрировать определенный уровень математической культуры и интуиции, позволяющий решать задачи незнакомого типа, в том числе и нестандартные.

Школьникам, особенно слабым, нравятся задания с выбором ответа, для многих из них они представляют психологическую опору в условиях стрессовой ситуации экзамена. Задачи на составление уравнений или текстовые алгебраические задачи представляют собой традиционный раздел математики и занимают важное место в тестах. Практически в каждом тестировании была текстовая задача. Интерес к ним вполне понятен. Решение задач такого типа способствует развитию логического мышления, сообразительности, умения самостоятельно осуществлять небольшие исследования.

О решении и исследовании текстовых задач

В текстовых задачах соотношения между искомыми величинами, числовыми данными и параметрами не задаются заранее, а устанавливаются из условий задачи, сформулированных словесно.

Решение задачи на составление уравнений (или систем) можно разбить на 4 этапа, как и при решении геометрических задач на построение: анализ, построение, доказательство, исследование условий возможности построения и числа решений. Эти этапы легко заметить и в процессе решения текстовых задач.

<u>Анализ.</u> Обозначив неизвестное число некоторой буквой, мы рассуждаем о нем так, как если бы оно нам известно, и устанавливаем функциональную зависимость между ним и данными числами и параметрами. Полученное уравнение (или система) представляет собой функциональную зависимость искомой величины от заданных величин. Следует иметь в виду, что легче составить систему уравнений с несколькими неизвестными, чем одно уравнение с одним неизвестным. Поэтому на пути к решению не должно останавливать большое количество неизвестных, которые следует ввести.

<u>Построение.</u> (решение уравнения или системы). Решая систему уравнений, как правило, следует держать в поле зрения два обстоятельства. Во-первых, систему уравнений нужно воспринимать в целом, решая вне связи с задачей. Во-вторых, нельзя упустить из виду те неизвестные (или комбинации неизвестных), которые позволяют ответить на вопрос задачи. Благодаря этому можно обойтись без излишних вычислений.

<u>Доказательство.</u> Ему отвечает проверка найденных корней по уравнению и условию задачи.

<u>Исследование условий возможности построения и числа решений.</u> В решении задач методом уравнений этот этап всегда явно присутствует под названием: исследование задач и уравнений.

Из четырех этапов процесса решения задач методом составления уравнений наибольшие трудности для абитуриентов представляют первый и последний. Это происходит оттого, что эти два этапа не формализованы, не существует алгоритма составления уравнения по условию задачи.

Для облегчения анализа условий задачи полезно применять графическую запись условия, а иногда и иллюстративную, как при решении арифметических задач.

Изложенные указания не могут претендовать на исчерпывающую полноту, т.к. многообразие различных соотношений действительности, изучающихся методами математики, не может быть уложено в рамки раз и навсегда установленных правил. Различные задачи, возникающие при решении практических и теоретических вопросов, имеют особенности, вносящие самые разнообразные моменты в их решение и исследование.

Текстовые задачи мы решаем на факультативных занятиях каждый год, начиная с 8 класса. Эта подборка задач предлагалась учащимся в 10 классе.

1. *Задачи на числовые зависимости*

При решении задач на числовые зависимости часто применяют следующие сведения: 1) если натуральное число А имеет n знаков, то $A=a_{n-1}10^{n-1}+a_{n-2}10^{n-2}+\ldots+a_1 10+a_0$, где $a_{n-1},\ldots\ a_1,\ a_0$, соответственно количество …сотен, десятков . единиц в числе А. 2) Если при делении натурального числа А на натуральное число В в частном получается q, а в остатке r, то A=Bq+ r.

Задача №1.Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к искомому числу прибавить 36, то получим число, записанное с помощью тех же цифр, но расположенных уже в обратном порядке. Найти это число.

Решение. Пусть xy – искомое число. Тогда xy=10x+y. Согласно условию, x+y=12и xy+36=yx, т.е. 10x+y+36=10y+x.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=12, \\ 9x-9y=-36. \end{cases}$$

Откуда x=4 и y=8

Ответ:48

Задача №2.Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 1, а в остатке 16. Если же к квадрату разности цифр этого числа прибавить произведение его цифр, то получится заданное число. Найти это число.

Решение. Обозначим первую цифру искомого числа x, а вторую цифру – y. Тогда искомое двузначное число равно 10x+y. Из первого условия задачи следует уравнение 10x+y=xy+16, а из второго – уравнение 10x+y= $(x-y)^2$+xy. Получим систему уравнений: $\begin{cases} 10x+y=xy+16, \\ 10x+y=(x-y)^2+xy. \end{cases}$

Сравним правые части, т.к. левые части в уравнениях равны. Получим: $(x-y)^2=16$, т.е. $x_1=4$ и $x_2=-4$.

Если x=4+y, то получим квадратное уравнение y^2-7y-24=0, решениями которого будут $y_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{145}}{2}$ Так как y – целое число, то в этом случае задача не имеет решений. Пусть x=y-4. Получим квадратное уравнение y^2-15y+56=0. Решая это уравнение, находим y_1=7 и y_2=8,тогда x_1=3 и x_2=4.

Ответ: 37; 48

<u>Задача №3.</u> Трехзначное число оканчивается цифрой 1. Если эту цифру перенести с последнего места на первое, сохранив порядок остальных двух цифр, то вновь полученное число будет меньше искомого на 90. Найти это число. Ответ: 211

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

1. Найдите двузначное число, зная, что число его единиц на 2 больше числа десятков, а произведение искомого числа на сумму его цифр равно 280. Ответ: 35.
2. Если двузначное число разделить на число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то в частном получится 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 8 и в остатке 7. Найдите это число. Ответ: 71.
3. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести в начало числа, то новое число будет больше утроенного первоначального числа на 1. Найти это число. Ответ: 103.
4. Сумма двух трехзначных чисел, записанных одинаковыми цифрами, но в обратном порядке, равна 1252. Найти эти числа, если сумма цифр каждого равна 14, а сумма квадратов цифр равна 84. Ответ: 428 и 824.
5. Сколькими нулями оканчивается число, полученное от умножения всех чисел натурального ряда от 1 до 100? Ответ: число оканчивается 24 нулями.
6. Найти четырехзначное число по следующим условиям: сумма квадратов крайних цифр равна 13; сумма квадратов средних цифр равна 85; если же из искомого числа вычесть 1089, то получится число, записываемое теми же цифрами, что и искомое, но в обратном порядке. Ответ: 3762.
7. Шестизначное число начинается цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число. Ответ: 142857.

8. Найти четырехзначное число, у которого как две первые, так и две последние цифры одинаковы, а само число является квадратом некоторого натурального числа. Ответ: 7744.

9. Какой цифрой оканчивается сумма всех двузначных чисел? Ответ: 5.

10. Сумма двух чисел, умноженная на сумму квадратов этих чисел, равна 369, а разность их, умноженная на разность их квадратов, равна 9. Найти числа. Ответ: 5 и 4.

11. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 10. Если от искомого числа отнять 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите искомое число. Ответ: 31.

12. Двузначное число, деленное на сумму своих цифр, дает в частном 4 и в остатке 3; если цифры этого числа переставить, то получится число на 5 больше ушестеренной суммы его цифр. Найти число. Ответ: 35.

13. Сумма цифр двузначного числа равна 7. Если к каждой цифре прибавить по 2, то получится число, на 3 меньшее удвоенного первоначального числа. Найти число. Ответ: 25.

14. Первое число при делении на второе дает в частном 2 и в остатке 3. Второе число при делении на третье дает в частном 1 и в остатке 8. Третье число при делении на четвертое дает в частном 2 и в остатке 1. Сумма всех четырех чисел равна 76. Найдите эти четыре числа. Ответ: 41, 19, 11, 5.

2. Задачи на движение

Примем следующие допущения:

1) Если нет специальных оговорок, то движение считается равномерным.

2) Скорость считается величиной положительной.

3) Всякие переходы на новый режим движения, на новое направление движения считают происходящими мгновенно.

4) Если тело с собственной скоростью U движется по реке, скорость течения которой равна V, то скорость движения тела по течению считается равной (U+V), а против течения- равной (U-V).

5) При движении тел навстречу друг другу время, через которое они встретятся, равно $S/(V_1+V_2)$, где S - расстояние между телами, а V_1 и V_2 - скорости тел. При движении тел в одну сторону (

V_1 больше V_2) время, через которое первое тело догонит второе, равно $S/(V_1-V_2)$.

Задача №4. Из города А в город В выезжает велосипедист, а через 3 часа после его выезда из города В выезжает навстречу ему мотоциклист, скорость которого в три раза больше скорости велосипедиста. Велосипедист и мотоциклист встречаются посередине между А и В. Если бы мотоциклист выехал не через 3, а через 2 часа после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к А. Найти расстояние между А и В.

Решение. Обозначим искомое расстояние между пунктами А и В через а , скорости велосипедиста и мотоциклиста в и с соответственно.Из условий задачи имеем систему: $\begin{cases} c = 3в, \\ a/2в - a/2c = 3, \\ a - 30/2в - a + 30/2c = 2. \end{cases}$ Используя первое уравнение, второе уравнение системы можно записать в виде: $\frac{a}{2в} - \frac{a}{6в} = 3,$ откуда получаем в=а/9. Подставляем с=3в и в=а/9 в третье уравнение и получим уравнение для нахождения величины а: $\frac{3a-180}{a} = 2,$ откуда а=180. Ответ: 180 км.

Задача №5. В реку впадает приток. Катер отходит от пункта А, находящегося на притоке, идет по течению 80 км до впадения притока в реку в пункте В, а затем идет вверх по реке до пункта С. На путь от А до Сон затратил 18 часов, на обратный путь – 15 часов. Найти расстояние от пункта В до пункта С, если известно, что скорость течения реки 3 км/ч, а собственная скорость катера 18 км/ч.

Решение. Пусть расстояние между пунктами В и С равно х км, а скорость течения в притоке – у км/ч. Тогда скорость катера при движении в притоке по течению от А до В равно (18+у) км/ч, а при движении от В к А равна (18-у) км/ч. Время, затраченное на путь от А к В равно $\frac{80}{18+y}$ ч, а на путь от В к А - $\frac{80}{18-y}$ ч.При движении катера от В к С скорость его равна 15 км/ч, а при движении от С к В равна 21км/ч. Следовательно, время, затраченное на путь от В к С равно $\frac{x}{15}$ ч, а на путь от С к В - $\frac{x}{21}ч$. Итак, получаем систему уравнений: $\begin{cases} \frac{80}{18+y} + \frac{x}{15} = 18, \\ \frac{x}{21} + \frac{80}{18-y} = 15. \end{cases}$

Из системы находим: x_1=210, y_1=2 и x_2=$19\frac{2}{3}$, y_2=-66.Условиям задачи удовлетворяет решение x_1=210, y_1=2. Поэтому расстояние от В до С равно 210 км. Ответ: 210 км

Задача №6. По окружности длиной 100 м равномерно движутся две точки. Они встречаются через каждые 4 с, двигаясь в противоположных направлениях, и через каждые 20 с, двигаясь в одном направлении. Найти скорости этих точек.

Решение. Пусть скорость первой точки x м/с, а второй y м/с, причем x больше y. При движении в противоположных направлениях точки встречаются через 4 с и за это время проходят суммарно 100м, т.е. 4(x+y)=100. При движении в одном направлении первая точка догоняет вторую каждые 20 с, т.е. за каждые 20 с первая точка проходит путь на один оборот больше. Получаем второе уравнение: 20x-20y=100.

Приходим к системе уравнений: $\begin{cases} x+y=25, \\ x-y=5. \end{cases}$ Решая систему, имеем x=15,y=10.Найденные значения условиям задачи удовлетворяют. Ответ: 15 м/с, 10 м/с.

Задачи для самостоятельного решения

1. Туристу надо пройти расстояние от деревни до станции. Пройдя 3 км за час, он понял, что опоздает на поезд, и пошел со скоростью 4 км/ч. На станцию он пришел за 45 минут до отхода поезда. Если бы он шел с первоначальной скоростью, то опоздал бы на поезд на 40 минут. Определить расстояние от деревни до станции. Ответ: 20 км.

2. Два пешехода, находящиеся в пунктах А и В, расстояние между которыми равно 27 км, выходят из этих пунктов одновременно. Они встречаются через 3 часа, если идут навстречу друг другу, и один догоняет другого через 9 часов, если они идут в одном направлении. Найти скорость каждого пешехода. Ответ: 6 км/ч и 3 км/ч

3. Два тела А и В двигаются по двум прямым линиям, пересекающимся под прямым углом. Скорость тела А равна 4 м/сек, а скорость тела В – 3 м/сек. В данный момент тело А отстоит от точки пересечения на 300 м и движется по направлению к ней , а тело В отстоит от точки пересечения на 250 м и движется от нее. Через сколько

времени расстояние между телами будет равно 1825 м? Ответ: 375 сек.

4.Из пунктов А и В вышли навстречу друг другу два поезда, причем второй поезд вышел на полчаса позже первого. Через 2 часа после выхода первого поезда расстояние между ними составляло 19/30 расстояния между А и В. Поезда встретились на середине АВ. За сколько часов каждый поезд пройдет путь АВ? Ответ: 10 и 9 час.

5. Два мотоциклиста отправляются одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В, расстояние между которыми 660 км. В то время, как первый проходит 250 км, второй проходит 200 км. Найдите скорость движения мотоциклистов, считая их движении равномерным, если первый мотоциклист приходит в В на 3 ч раньше, чем второй в А. Ответ: 55 и 44 км/ч.

6. Катер прошел против течения реки 8 км, повернул обратно и прошел по течению 36 км. Весь рейс длился 2 часа. Потом катер прошел против течения реки 6 км и по течению 33 км, затратив на этот второй рейс 1 ч 45 мин. Найдите скорость катера в стоячей воде. Ответ: 20 км/ч.

7. Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу, один из А в В, другой из В в А. Каждый шел с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, немедленно поворачивал обратно. Первый раз они встретились в 12 км от В, второй – в 6 км от А через 6 ч после первой встречи. Найдите расстояние от А до В и скорости обоих туристов. Ответ: 30 км, 6 км/ч и 4 км/ч.

8. Турист ехал на автомобиле 5/8 всего пути, а остальную часть - на катере. Скорость катера на 20 км/ч меньше скорости автомобиля. На автомобиле турист ехал на 15 минут дольше, чем на катере. Чему равны скорость автомобиля и скорость катера, если весь путь туриста составил 160 км? Ответ: скорость автомобиля 100 км/ч или 70 км/ч, скорость катера 80 км/ч или 60 км/ч.

3. Задачи на совместную работу

Основными компонентами этого типа задач являются работа, время и производительность, а содержание их сводится к следующему. Некоторую работу выполняют несколько человек или механизмов, работающих с постоянной для каждого производительностью. Объем работы, который надо выполнить, принимается за единицу. Тогда производительность, т.е. величина работы, выполняемой за единицу времени, будет равна 1/t, где   -время, необходимое для выполнения всей работы. Находится та часть работы, которую выполняет каждый рабочий отдельно, за то время, которое он работал. Складываем эти объемы работ и приравниваем к объему всей работы.

Задача №7. Два каменщика, из которых второй начинает работу на 1, 5 дня позже первого, могут выстроить стену за 7 дней. Если бы эта работа была поручена каждому отдельно. То для ее завершения первому потребовалось бы на 3 дня больше, чем второму. Во сколько дней каждый из них выстроит стену?

Решение. Допустим, что второй каменщик выполнит всю работу за x дней, тогда первый каменщик – за (x+3) дня. Принимая работу за единицу, находим, что производительность . первого каменщика равна $\frac{1}{x+3}$, а второго - $\frac{1}{x}$. За 1, 5 дня первый сделает 1,5$\frac{1}{x+3}$часть работы, остальную часть работы они выполнят совместно за 5,5 дней, что составит $(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x})5{,}5$. Составляем уравнение: $(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x})5{,}5+1{,}5\frac{1}{x+3}=1$или $2x^2-19x-33=0$. Отсюда $x_1=11$, $x_2=-1{,}5$. Условию задачи удовлетворяет x=11. Ответ: 14 и11 дней.

Задача №8. Первому трактору на вспашку всего поля требуется на 2 часа меньше, чем третьему, и на 1 час больше, чем второму. При совместной работе первого и второго тракторов поле может быть вспахано за 1час 12 минут. Какое время на вспашку поля будет затрачено при совместной работе всех трех тракторов?

Решение. Пусть $x_ч$-время, необходимое для вспашки поля первому трактору, $y_ч$-второму и z-третьему трактору. Тогда $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$- производительность каждого трактора соответственно. По условию задачи: $\begin{cases} z-x=2, \\ x-y=1, \\ 1{,}2(1/x+1/y)=1. \end{cases}$ Решая эту систему. получим (3;2;5) и (-0,4;-0,6;2,4). По смыслу задачи нам подходит первое решение. При совместной работе трех тракторов производительность труда составит 1/3+1/2+1/5=31/30. Тогда время на вспашку поля тремя тракторами составит 30/31 часа. Ответ : 30/31 часа.

Задача №9. В бассейн проведены две трубы – подающая и отводящая, причем через первую трубу бассейн наполняется на 2 часа дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на одну треть бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8 часов. За сколько часов одна первая труба может опорожнить полный бассейн?

Решение. Пусть V$м^3$- объем бассейна, производительность подающей трубы –x $м^3$/ч. Время, необходимое подающей трубе для заполнения бассейна-V/x ч; время, необходимое отводящей трубе на опорожнение бассейна-V/y ч. По условию задачи V/x-V/y=2. Так как производительность отводящей трубы больше производительности наполняющей, то при обеих включенных трубах будет происходить опорожнение бассейна и одна треть бассейна опорожнится за время $\frac{V/3}{y-x,}$ которое по условию задачи равно 8 ч. Итак, условие задачи может быть записано в виде системы двух уравнений для трех неизвестных $\begin{cases} V/x - V/y = 2 \\ V/(y-x) = 24 \end{cases}$. Разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей во втором уравнении системы на V. Тогда относительно переменных u = $\frac{V}{x}$ и z=$\frac{V}{y}$ получим следующую систему уравнений $\begin{cases} u - z = 2 \\ uz/(u-z) = 24 \end{cases}$, которая эквивалентна системе $\begin{cases} u - z = 2 \\ uz = 48 \end{cases}$, где u=8, z= 6. Ответ: 8 часов, 6 часов.

Задачи для самостоятельного решения

1. Двое рабочих могут выполнить некоторую работу за 12 дней. После 8 дней совместной работы один из них перешел на другой участок. Второй рабочий окончил ее один за 5 дней. За сколько дней каждый из них, работая отдельно, может выполнить эту работу? Ответ: 60 дней, 15 дней.
2. Две трубы, работая совместно, наполняют бассейн за 6 часов. За какое время наполняет бассейн каждая труба в отдельности, если известно, что в течение 1 ч из первой трубы вытекает на 50% больше воды, чем из второй? Ответ: 10ч, 15 ч.
3. Две машинистки должны были перепечатать рукопись, состоящую из трех глав, из которых первая вдвое короче второй и втрое длиннее третьей. Работая вместе, машинистки перепечатали первую главу за 3 ч 36 мин. Вторая глава была перепечатана за 8 часов, из которых 2 ч работала только первая машинистка, а остальное время они работали вместе. Какое время потребуется второй машинистке, чтобы одной перепечатать третью главу? Ответ: 3 ч.

4. Трое рабочих разной квалификации выполнили некоторую работу, причем первый работал 6 ч, второй – 4 ч, третий – 7 ч. Если бы первый работал 4 ч, второй 2 ч, а третий 5 ч, то было бы выполнено лишь 2/3 всей работы. За сколько часов рабочие закончили бы работу, если бы они работали все вместе одно и то же время? Ответ: за 6 часов.

5. Одна бригада может убрать все поле за 12 дней. Другой бригаде для выполнения той же работы нужно 75% этого времени. После того как в течение 5 дней работала только первая бригада, к ней присоединилась вторая, и обе вместе закончили работу. Сколько дней работали бригады вместе? Ответ: 3 дня.

6. В бассейн проведены две трубы. Если вода будет течь через одну вторую трубу, то бассейн наполнится на 3 часа быстрее, чем если бы вода текла только через одну первую трубу. Вода втекала в течение 5,75 часа через первую трубу, затем открыли вторую трубу, и через 10 часов бассейн наполнился. За сколько часов наполняет бассейн каждая труба в отдельности? Ответ: 27 ч и 24 ч.

7. Два токаря должны были изготовить определенное число деталей. После трехчасовой совместной работы продолжал работать только второй токарь, который проработал еще 4 часа. После этого задание оказалось перевыполненным на 12,5%. За какое время мог бы выполнить задание каждый токарь, если известно, что второму на это понадобится на 4 часа меньше, чем первому? Ответ: 12 ч и 8 ч.

8. Некоторое число рабочих выполнили работу за несколько дней. Если число рабочих увеличится на 3, то работа будет сделана на 2 дня скорее, а если число рабочих увеличится на 12, то на 5 дней скорее. Определить число рабочих и время, необходимое для выполнения этой работы. Ответ: 12 рабочих, 10 дней.

4. Задачи на сплавы и смеси

Решение этих задач связано с понятиями «концентрация», «процентное содержание», «проба» и т.д. и основано на следующих допущениях: 1) все рассматриваемые смеси (сплавы, растворы) однородны. 2) Не делается различия между литром как единицей емкости и единицей массы. 3) При слиянии двух растворов, имеющих объемы V_1 и V_2 , получается смесь, объем которой равен $V_1 + V_2$.

4)пусть смесь состоит из двух веществ А и В. Если масса смеси, а и массы веществ А и В соответственно, то величины и называются концентрацией вещества А и вещества В в смеси. Величины и называются процентным содержанием вещества А и В соответственно в смеси. Очевидно, что =1, т.е. концентрация одного вещества определяется концентрацией другого.

В условиях задач на сплавы и смеси часто встречается один и тот же повторяющийся элемент: из двух или нескольких смесей, содержащих компоненты А и В**,** составляется новая смесь путем смешивания исходных смесей, взятых в определенной пропорции и требуется найти, в каком соотношении компоненты А и В войдут в получившуюся смесь. Для решения таких задач с помощью концентраций надо разделить каждую смесь на отдельные компоненты, а затем, исходя из условия задачи, составить новую смесь. При этом легко подсчитать, какая масса каждой компоненты входит в получившуюся смесь, а также полную массу этой смеси. После этого определяется концентрация веществ А и В в новой смеси.

<u>Задача №10.</u> Имеются два куска сплава меди и цинка с процентным содержанием меди 20% и 40% соответственно. В каком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы, переплавив взятые куски вместе, получить сплав, содержащий 25 % меди?

Решение. Концентрация меди в первом сплаве равна1/5, а во втором 2/5. Если первого сплава взять х кг, а второго у кг, то эти величины можно разложить на отдельные составляющие: х=$\frac{x}{5}$(кг меди)+$\frac{4x}{5}$(кг цинка), у=$\frac{2y}{5}$(кг меди)+$\frac{3y}{5}$(кг цинка). Масса меди в получившемся сплаве равна (х/5+2у/5) кг, а масса всего сплава составит (х+у) кг. Поэтому новая концентрация меди в сплаве равна (х+2у)/(5(х+у)), и по условию задачи имеем: $\frac{x+2y}{5(x+y)}=\frac{1}{4}$. Это уравнение содержит два неизвестных х и у. Оба неизвестных однозначно не находятся. Но концентрация сплава определяется не массой взятых кусков, а отношением этих масс. Поэтому определим отношение х/у (у$\neq$0)

$\frac{x/y+2}{5(x/y+1)}=\frac{1}{4}$.Отсюда х/у=3 Ответ: 3:1

<u>Задача №11.</u> Имеется сплав двух сортов стали с содержанием никеля 5 % и 40%. Сколько стали одного и другого сорта следует взять, чтобы после переплавки получить 140 т стали с содержанием никеля 30%?

Решение. Взяв для переплавки х т стали, содержащей 5% никеля, чистого никеля взяли при этом х$\frac{5}{100}$т, а взяв для переплавки у т стали, содержащей 40% никеля, никеля взяли при этом у$\frac{40}{100}$ т. Так как в новом сплаве никеля стало содержаться 140$\frac{30}{100}$ т, то получим уравнение: $\frac{5}{100}$х+$\frac{40}{100}$у=42. Кроме того, по условию задачи х+у=140. Итак, имеем систему уравнений:

$\begin{cases} 5x + 40y = 4200, \\ x + y = 140 \end{cases}$ Решая систему, находим х=40, у=100. Ответ: 40 т, 100 т.

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

1. Из 40 т железной руды выплавляют 20 т стали, содержащей 6 % примесей. Каков процент примесей в руде? Ответ: 53 %.
2. Имеется сплав, состоящий из никеля, меди и марганца. Масса никеля составляет 40 % массы меди и марганца, а масса меди составляет 60 % массы никеля и марганца. Каково отношение массы марганца к сумме масс никеля и меди? Ответ: 19/37.
3. Смешали 10-процентный и 25-процентный растворы соли и получили 3 кг 20-процентного раствора. Какое количество каждого раствора в килограммах было использовано? Ответ: 1 кг и 2 кг.
4. Имеется три слитка. Первый слиток весит 5 кг, второй – 3 кг, и каждый из этих слитков содержит 30 % меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56 % меди, а если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60 % меди. Найдите массу третьего слитка и % содержания меди в нем. Ответ: 10 кг, 69 % меди.
5. Имеются два сплава золота и серебра. В одном сплаве количество этих металлов находится в отношении 2:3, а в другом – в отношении 3:7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5:11? Ответ: 1 кг и 7 кг.
6. Руда из первого рудника содержит 72 % железа, а из второго 58 % железа. Смешав некоторые количества первой и второй руды, получили руду, содержащую 62 % железа. Если бы взяли каждой руды на 15 кг больше, то получили бы руду, содержащую 63,25 % железа

за. Сколько было взято руды из обоих рудников для составления смеси? Ответ: 12 кг и 30 кг.

7. Имеется сталь двух сортов, один из которых содержит 5%, а другой 10% никеля. Сколько тонн каждого из этих сортов нужно взять, чтобы получить сплав, содержащий 8% никеля, если во втором куске никеля на 4 тонны больше, чем в первом? Ответ: 40 т и 60 т

8. Имеются два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в 2,5 раза больше, чем во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплаве разных по массе частей первого и второго слитков получится слиток, в котором содержится 35% золота? Ответ: в 2 раза.

9. Сплавляя два одинаковых по массе куска чугуна с разным содержанием хрома, получили сплав, в котором содержалось 12 кг хрома. Если бы масса первого куска была в 2 раза больше, то в сплаве содержалось бы 16 кг хрома. Известно, что содержание хрома в первом куске на 5% меньше, чем во втором. Найдите процентное содержание хрома в каждом куске чугуна. Ответ: 5% и 10%.

10. Имеются два слитка, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый слиток содержит 40% олова, а второй – 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором слитках одинаково. Сплавив 150 кг первого слитка и 250 кг второго, получим сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько кг олова содержится в получившемся новом сплаве? Ответ: 170 кг.

5. <u>Задачи на проценты</u>

1. Найдите отношение двух чисел, если известно, что разность первого числа и 10 % второго числа составляет 50 % суммы второго числа и 50 % первого. Ответ: 4/5.

2. За 1 кг одного продукта и 10 кг другого продукта заплачено 20000 рублей. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 15 %, а второй подешевеет на 25 %, то за такое же количество этих продуктов будет заплачено 18200 рублей. Сколько стоит 1 кг каждого продукта? Ответ: 8000 руб. и 1200 руб.

3. Свежие огурцы, содержащие 98 % воды, весили 100 кг. Когда огурцы немного усохли, то воды в них стало 96 %. Сколько стали весить огурцы после усыхания? Ответ: 59 кг.

4. В начале года в сберкассу на книжку было внесено 1640 долларов, а в конце года было взято обратно 882 доллара. Еще через год на книжке снова оказалось 882 доллара. Сколько % начисляет сберкасса в год? Ответ: 5%.

5. Бригада по плану должна выпустить 360 деталей. Первые восемь дней она перевыполняла план на 20 %. Оставшиеся дни она перевыполняла план на 25 %. В результате бригада сделала на 82 детали больше, чем требовалось по плану. Сколько дней работала бригада? Ответ: 18 дней.

6. Количество студентов в институте, увеличиваясь на одно и то же число процентов ежегодно, возросло за три года с 5000 до 6655 человек. На сколько процентов увеличивалось число студентов ежегодно? Ответ: на 10 %.

7. На овощной базе имелся крыжовник, влажность которого составляла 99 %. За время хранения его влажность уменьшилась на 1% (стала 98%). На сколько % уменьшилась масса хранившегося на базе крыжовника? Ответ: на 50%.

8. Число студентов курса, успешно сдавших все зачеты, заключено в пределах от 96,8 % до 97,2 % от общего числа студентов. Найдите минимальное число студентов, которое может быть на таком курсе. Ответ: 32.

9. Число 51,2 трижды увеличивали на одно и то же число %, а затем трижды уменьшали на то же самое число %. В результате получилось число 21,6. На сколько % увеличивали, а затем уменьшали это число? Ответ: на 50 %.

10. Число увеличили на 25 %. На сколько % надо уменьшить результат, чтобы получить исходное число? Ответ: 20 %.

11. Планку длиной 525 см разрезали на две части так, что первая из них оказалась короче второй на 25%. Найти длину каждой части. Ответ: 225 см и 300 см.

12. После двух последовательных повышений зарплата составила 15/8 частей от первоначальной. На сколько % повысилась зарплата в первый раз, если второе повышение было вдвое больше (в процентном отношении) первого? Ответ: 25 %.

Замечания

1. Подборка текстовых задач, на мой взгляд, не особо сложная. Я их подбирала с таким расчетом, чтобы десятиклассники набили руку в решении текстовых задач.

2. В 11 классе я задачи данных типов усложнила. Кроме того, были добавлены задачи на прогрессии, задачи на процентный прирост и вычисление «сложных процентов», задачи, которые решаются при помощи неравенств и задачи, в которых число неизвестных больше числа уравнений.

3. Все задачи даны с ответами. Если ученик на тестировании правильно решит текстовую задачу, то правильный ответ из предложенных он наверняка выберет.