Т. С. Нессон,
учитель математики высшей категории
гимназии №1 г. Березовки Лидского района Гродненской области

Роль факультативных занятий в подготовке к ЦТ по математике

Анализ материалов централизованного тестирования свидетельствуют о том, что с каждым годом ухудшаются результаты тестирования по математике. В целом по республике 2008 году относительно низкие результаты по математике (от 20 баллов и ниже) показали 57,3% абитуриентов, в 2009 году эта статистика была еще красноречивее: от 0 до 20 баллов на тестировании по математике набрали 58,1%. Результаты 2010 года просто ошеломили. Через несколько дней после ЦТ по математике информационные агентства со ссылкой на Республиканский институт контроля знаний опубликовали следующие цифры: математику на 20 баллов и ниже сдали 62,45% абитуриентов. Средний балл составил 21,76. При этом тесты 2010 года по математике были самыми адекватными. В них не было олимпиадных задач, не было задач с параметрами, как в предыдущие годы. Задания были грамотно и стандартно сформулированы. В чем же причина низких результатов? Считаю, что причина заключается не столько в неумении решать математические задачи, сколько в недостаточной методологической подготовке учащихся к процедуре тестирования. Доказано, что люди, хорошо знакомые с процедурой тестирования, показывают стабильно более высокие результаты, чем неопытные испытуемые. Многие ученики решают эту проблему самостоятельно, обучаясь на подготовительных курсах, занимаясь с репетитором, или участвуют в тестировании по принципу «вдруг повезет» без достаточной теоретической подготовки. Как показало анкетирование, учащиеся нуждаются в дополнительной подготовке к ЦТ, при этом большинство выражают необходимость непрерывной подготовки на протяжении всего периода обучения как в урочной, так и во внеурочной деятельности. Возникает необходимость создания в учреждении образования условий по подготовке к ЦТ, что позволит реализовать социально-образовательные запросы учащихся. Важно системно подойти к решению всех вопросов, связанных с подготовкой к ЦТ.

Многолетний педагогический опыт позволяет сделать вывод о том, что начинать подготовку к ЦТ нужно как можно раньше, как минимум за два года до экзамена. Здесь очень важно сохранить преемственность в подготовке учащихся к ЦТ на уроках и факультативных занятиях. Особую роль нужно отводить факультативным занятиям, которые позволяют расширить рамки школьной программы, включить изучение сложных вопросов ЦТ в содержание проводимых факультативных занятий. С этой целью можно использовать программу факультатива для 10–11 классов общеобразовательных учреждений «Итоговое повторение школьного курса математики». Программа данного факультатива направлена на повторение, систематизацию и углубление всего школьного курса математики. Основная задача факультатива – целенаправленная подготовка учащихся к централизованному тестированию по математике, отработка стратегии и тактики поведения выпускников как в период перед экзаменом, так и во время испытания. Планирование работы факультатива целесообразно составить таким образом, чтобы вопросы, изучаемые на факультативе, перекликались с вопросами, изучаемыми на уроках. Кроме того, параллельно с программным материалом должны отрабатываться те моменты, которые обеспечивают успешное прохождение тестирования:

- ✓ изучение структуры тестов и типов заданий;
- ✓ изучение специфики формулировок тестовых заданий;
- ✓ обучение жесткому самоконтролю времени;
- ✓ отработка навыков определения сложности задания;
- ✓ изучение приемов спирального движения по тесту, т. е. от простого к сложному;
- ✓ изучение некоторых приемов запоминания математической информации;
- ✓ раскрытие так называемых «секретов» получения правильного ответа;
- ✓ психологическая подготовка к процедуре тестирования.

Типичные ошибки, допускаемые выпускниками, повторяются из года в год. Среди них – неумение преобразовывать выражения с радикалами, низкие практические навыки при действиях с логарифмами и модулями, нетвердое знание и практическое владение формулами сокращенного умножения, не хватает творческого подхода при решении геометрических задач. Также большие затруднения у абитуриентов вызывает тригонометрия. Многие учащиеся не умеют делать эскизы графиков функций, в ходе решения тригонометрических уравнений определенные затруднения испытывают при отборе корней для заданного промежутка, непрочное усвоение формул тригонометрии ведет к ошибкам при преобразовании и вычислении тригонометрических выражений.

При изучении блока тригонометрии целесообразно провести входной контроль в форме зачета, на котором учащиеся показывают знания основных формул. Предлагается продолжить равенства:

1. $cos\,2\alpha =$
2. $tg\,(\alpha + \beta) =$
3. $sin^2 \dfrac{\alpha}{2} =$

4. $cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=$

5. $cos\alpha$ - cos β =

6. 1 + $tg^2\alpha$ =

7. $\dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$ =

8. $\sin\alpha$ $\cos\beta$ - $sin\beta$ $\cos\alpha$ =

9. $\sin\alpha$ $\cdot\sin\beta$ =

10. $\sin 3\alpha$ =

Параллельно с изучением формул сложения отдельное факультативное занятие следует отвести для изучения и применения **метода вспомогательного угла** для решения разного типа задач, так как он широко применяется не только для вычисления и преобразования тригонометрических выражений, но и для решения уравнений, а также задач, связанных со свойствами функций. Предлагаю ряд заданий, которые будут способствовать отработке навыков применения метода вспомогательного угла.

Вычислить значения выражений:

1. $\cos 15^0+\sin 15^0$;
2. $\cos 75^0 ctg 30^0+\sin 75^0$;
3. $\dfrac{\sqrt{3}\sin 250^0+\cos 290^0}{\sin 40^0}$;
4. $\dfrac{1}{\sin 920^0}+\dfrac{1}{\sqrt{3}\sin 470^0}$;
5. $\dfrac{2\sqrt{3}-2tg15^0}{1+\sqrt{3}tg15^0}$.

Решить уравнения:

1. $4\cos^2 x=2+\dfrac{1}{2\cos 2x}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 2x}+\dfrac{1}{\sin 2x}\right)$;
2. $\sin x-\sin 15x\cos x=\dfrac{3}{2}$;
3. $2\sin 3x-\cos x\cdot\cos 3x=1$.

Одновременно с изучением формул двойного аргумента и формул преобразования произведения в сумму (разность) есть смысл рассмотреть **способ домножения**. Этот способ используется, когда рассматриваемое выражение преобразуется путем домножения и деления соответствующих членов на подходящую тригонометрическую функцию. Для произведений вида

$$\cos x\cos 2x\ldots\cos(2^k x)$$

рекомендуется домножение и деление на $2^{k+1}\sin x$ с последующим применением формул двойного аргумента для синуса. Суммы

$$\cos x + \cos 2x+\ldots+\cos(nx) \quad \text{и} \quad \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin(nx)$$

преобразуются домножением и делением на $2\sin\frac{\tilde{o}}{2}$ с последующим применением к слагаемым формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность. Следующие задания направлены на отработку навыков применения способа домножения. Вычислить:

1. $\cos 20^0 \cos 40^0 \cos 60^0 \cos 80^0$;
2. $\sin 18^0 \cos 36^0$
3. $\dfrac{10\sin 400^0 \sin 50^0}{\cos 10^0}$
4. $tg\dfrac{\pi}{9}tg\dfrac{2\pi}{9}tg\dfrac{4\pi}{9}$.

Упростить:

1. $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}+\cos\dfrac{6\pi}{5}$;
2. $\cos\dfrac{\pi}{11}+\cos\dfrac{3\pi}{11}+\cos\dfrac{5\pi}{11}+\cos\dfrac{7\pi}{11}+\cos\dfrac{9\pi}{11}$;
3. $\sin\dfrac{\pi}{7}-\sin\dfrac{3\pi}{7}+\sin\dfrac{5\pi}{7}$.

Программой по математике не предусмотрено изучение **формул тройного аргумента**. Однако в литературе по подготовке к ЦТ по математике встречаются задания, решение которых связано с применением этих формул. Поэтому с целью полного и глубокого изучения раздела тригонометрии выстроить факультативные занятия следует так, чтобы формулы тройного аргумента не остались вне поля зрения учащихся.

Интерес у способных к математике учащихся вызывает **метод получения уравнений** для искомой величины. Он применим, например, для вычисления значения выражения $\sin 18^0$. Заметим, что

$$\sin 36^0 = \cos 54^0.$$

Из формул двойного и тройного аргументов следует:

$$2\sin 18^0 \cos 18^0 = 4\cos^3 18^0 - 3\cos 18^0;$$

$$2\sin 18^0 = 4\cos^2 18^0 - 3;$$

$$2\sin 18^0 = 4(1 - \sin^2 18^0) - 3;$$

$$4\sin^2 18^0 + 2\sin 18^0 - 1 = 0.$$

Получили квадратное уравнение относительно $\sin 18^0$. Решая его, получаем корни $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ и $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$, последний из которых не является решением, так как $\sin 18^0>0$. Окончательно имеем $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Следует акцентировать внимание учащихся на полученный результат и нацелить их на его запоминание, так как полученный ответ может быть использован при решении геометрических задач. А затем предложить вычислить $\sin 42^0$. (Указание: заметим, что $\sin 42^0 = \sin(60^0 - 18^0)$.

Одна из характеристик любой функции – множество ее значений. Нахождению области значений тригонометрических функций также следует уделить внимание на факультативном занятии по подготовке к ЦТ. Сначала можно предложить ряд устных упражнений, например, заполнить самостоятельно таблицу с последующей самопроверкой и разбором ошибок:

№	Функция	E(y)
1	$y = 3\sin 2x$	
2	$y = 5\cos x - 4$	
3	$y = 2\sin\frac{\tilde{o}}{3} + 1$	
4	$y = 2 - 5\cos 3x$	
5	$y = \lvert\cos x\rvert + 7$	
6	$y = 2 - \sin^2 x$	
7	$y = 4\sin x\cos x$	
8	$y=\cos 2x\sin x+\sin 2x\cos x - 1$	
9	$y = 3 - 5\lvert\sin 2x\rvert$	
10	$y = \lvert 4 - 7\cos 2x\rvert$	

К сожалению, учебник алгебры для 10 класса А. П. Кузнецовой не содержит более сложных заданий по определению множества значений тригонометрических функций, хотя в тестах ЦТ и РТ предыдущих лет предлагались подобные задания более высокого уровня сложности. Вот примеры некоторых из них:

1. Укажите количество целых чисел из области значений функции
   $f(x) = 4\cos 3x\cos 5x - 2\cos 2x + 11$;
2. Длина промежутка множества значений функции
   $f(x) = 2 + 4\sin x - \cos^2 x$ равна …
3. Наименьшее значение функции $f(x) = 2\sqrt{3}\sin 6x - 2\cos 6x - 3$ равно…
4. Наибольшее значение функции $f(x)=\sqrt{13}\sin\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}-7$ равно…
5. Сумма наибольшего и наименьшего значений функции
   $f(x) = 6\sin 3x\cos 3x - 5\cos^2 3x - 13\sin^2 3x$ равна …
6. Указать количество натуральных чисел, которые содержит множество значений функции $f(x) = \sqrt{6{,}4\sin^2 x + 9{,}6\sin x\cos x + 13{,}6\cos^2 x}$;
7. Найти множество значений функции $y = tg\,\frac{\pi x}{x^2+4}$;
8. Найти сумму всех чисел из области значений функции $y = tg\left|x+\frac{\pi}{2}\right| ctg\left|x-\frac{\pi}{2}\right|$.

Решая подобные задачи, следует обратить внимание учащихся на различные подходы, используемые для получения ответа.

Далее будет уместно рассмотреть ряд уравнений, решение которых основано на ограниченности тригонометрических функций. Например,

1. Укажите количество корней уравнения $\sin\frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2$;
2. Найдите значение выражения $8x_0$, где x_0 – корень уравнения $5^{\left|1-4\tilde{o}^2\right|} = \sin\pi x$;
3. Решите уравнение $6^{-9\tilde{o}^2}\cdot\cos 6x = 1$;
4. Найдите количество корней уравнения $tg^2 x + ctg^2 x + 4 = \frac{6}{\sin^2 2x}$ на отрезке $[0; 2\pi]$;
5. Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения: $2^x + 2^{-x} = 2\cos\frac{\tilde{o}}{5}$;

6. Решите уравнение $\cos\dfrac{16\pi}{16x^2-8x+49}=\dfrac{1}{tg^2\pi x+ctg^2\pi x}$ и в ответ запишите его корень, увеличенный в 12 раз;

7. Найти произведение корней уравнения $x^2-2x\sin\dfrac{\pi x}{2}+1=0$.

Для получения обратной связи учащимся можно предложить мини-тест:

№ задания	Задание	Варианты ответов
А.1	Максимальное значение из области значений функции $y = 5\cos 3x - 2$ равно	1) 1; 2) -3; 3) -2; 4) 3; 5) 2.
А.2	Область значений функции $y = 4\cos^2 x - 4\cos x + 1$ есть множество	1) [1; 3]; 2) [0; 3]; 3) [1; 9]; 4) [0; 9]; 5) [-3; 1];
А.3	Длина промежутка, являющегося областью значений функции $y = 4\sin 2x + 4\sqrt{3}\cos 2x - 3$, равна	1) 8; 2) 6; 3) 16; 4) 11; 5) 5.
В.1	Количество целых чисел из области значений функции $y = 10\sin^2 x - 6\sin x\cos x + 2\cos^2 x$ равно	
В.2	Решите уравнение $3^{\left|\sin\sqrt{x}\right|}=\left|\cos x\right|$. В ответ запишите значение выражения $x_0 + n$, где x_0 – целый корень уравнения, n – количество корней.	

Если продолжать разговор о тригонометрических функциях, то нельзя упустить такой момент, как их периодичность и задачи на нахождение их наименьшего положительного периода. Не каждому выпускнику среднего учебного заведения известно, что наименьший положительный период Т тригонометрических функций вида

$$y = A_1 \sin\left(\frac{a_1 x}{b_1}\right) + \ldots + A_n \sin\left(\frac{a_n x}{b_n}\right) + B_0 + B_1 \cos\left(\frac{k_1 x}{l_1}\right) + \ldots + B_m \cos\left(\frac{k_m x}{l_m}\right),$$

где числа $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ не все равны нулю, можно вычислить по формуле

$$T = \frac{2\pi k}{d},$$

где d является наибольшим общим делителем чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n,\ k_1,\ k_2, \ldots, k_m$, а k равно наименьшему общему кратному чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n,\ l_1,\ l_2, \ldots, l_m$.

Например, найти наименьший положительный период функции

$$y = \sin\frac{2x}{15} - 3\cos\frac{4x}{21} + \sin\frac{6x}{35}.$$

Согласно теории d= НОД $\{2;4;6\}$=2, k= НОК $\{15;21;35\}$=105. Значит,

$$T = \frac{2\pi \cdot 105}{2} = 105\pi.$$

В качестве тренировочных упражнений на нахождение наименьшего положительного периода могут быть предложены следующие функции:

1. $y = \cos^4 x$;
2. $y = tg\, 3x - ctg\, \frac{1}{2}x$;
3. $ó = \sin\frac{5x}{6} - \cos\frac{20x}{9}$;
4. $y = \cos\frac{3x}{2} - 2\sin\frac{9x}{10} + \cos\frac{6x}{5}$;
5. $y = \cos 2x + tg\frac{2x}{3} - 2\cos^4 x$

Таким образом, при подготовке к ЦТ по математике не следует тратить время на решение многочисленных тестов, а повторять материал блоками, начиная с простых заданий конкретной темы, заканчивая более сложными, где одно задание вытекает из другого. Тематическая подборка заданий должна быть представлена в виде логически взаимосвязанной системы, т. е. правильно решенное предыдущее задание готовит понимание смысла следующего. Таким образом, каждая тема изучается глубоко, рассматриваются все виды и типы заданий, отрабатывается алгоритмы их решения, учитываются все нюансы, тонкости, а это, в свою очередь, дает возможность основательно подготовиться к вступительным испытаниям.

Литература

1. **Феськов Н.С.** О мнимых и явных проблемах в централизованном тестировании / Н. С. Феськов, А. В. Колесникова // Адукацыя і выхаванне. - 2006 -. №5. с. 3 – 10.
2. **Алексеенко Е. П.** Экзамен в форме ЦТ: как оценить степень готовности? / Е. П. Алексеенко // Народная асвета. - 2010.- №11. 82-88с.
3. **Войтова Ю. К.** Система подготовки к централизованному тестированию по математике / Ю. К. Войтова, В. И. Глазунов. – Гомель, 2005
4. **Гулешова, Т. Д.** Круглый стол «Стратегия подготовки к ЦТ по математике // Народная асвета. – 2010. – №11. 85-89с.
5. **Федорако, Е. И.** Практикум по математике для подготовки к централизованному тестированию/ Е. И. Федорако. – Мозырь: Белый ветер, 2010. – 135с.
6. **Централизованное тестирование**. Математика: Сборник тестов / УО «Республиканский институт контроля знаний» Министерство образования РБ. Мн., 2005-2009.
7. **Тригонометрия** (тождества, уравнения, неравенства, системы) / А.И. Азаров, В. И. Булатов, В. С. Федосенко, А. С. Шибут. – Мн.: ТетраСистемс, 2003. – 304с.
8. **Азаров, А. И.** Серия «Тематический тренажер»/ А. И. Азаров. – Минск, 2008.
9. **Тренажер по математике для подготовки к централизованному тестированию и экзамену** / В. В. Веременюк. – 4-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – 176с.